Μάθημα 25

Άσκηση 7.7.2 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ολοκληρώσιμες (1)
και $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και (2)
$\int_a^b |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (3)

Λύση Η f είναι μετρήσιμη ως όριο μετρησίμων (4)
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x) - f(x)| \le 1$ $\forall x \in [a,b]$ αφού $f_n \rightrightarrows f$ (5)
Άρα $\big|\, |f_{n_0}(x)| - |f(x)| \,\big| \le |f_{n_0}(x) - f(x)| \le 1 \Rightarrow$ (6)
$\Rightarrow -1 \le |f_{n_0}(x)| - |f(x)| \Rightarrow |f| \le 1 + |f_{n_0}|$ (7)
$\Rightarrow \int_{[a,b]} |f| \le \int_{[a,b]} (1 + |f_{n_0}|) = (b-a) + \int_{[a,b]} |f_{n_0}| < \infty$ αφού f_{n_0} ολοκληρώσιμη (8)
Άρα f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. (9)
Επίσης $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge n_1$ $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$ (10)
αφού $f_n \rightrightarrows f$. Άρα (11)

$$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \int_{[a,b]} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \Rightarrow \int_{[a,b]} |f_n - f| \to 0 \quad \blacksquare \quad (12)$$

Άσκηση 7.7.3 f_n, f ολοκληρώσιμες και $\int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (13)
Δείξτε ότι $\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f$ και $\int |f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \int |f|$ (14)

Λύση

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| = \left| \int (|f_n| - |f|) \right| \le \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big| \quad (15)$$

$$\le \int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ . και} \quad (16)$$

$$\left| \int f_n - \int f \right| \le \int |f_n - f| \longrightarrow 0 \quad \blacksquare \quad (17)$$

Άσκηση 7.10.1 f_n μετρήσιμες κ $f_n \ge f_{n+1}$ και $\exists\, k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Τότε $\int f = \lim_n \int f_n$ όπου $f = \lim_n f_n$

Λύση $\forall n > k$ θέτουμε $g_n = f_k - f_n \ge 0$ και

$$g_{n+1} \ge g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_k - f$$

Άρα από ΘΜΣ $\int (f_k - f) = \lim_n \int (f_k - f_n)$

$$\Rightarrow \int f_k - \int f = \int f_k - \lim_n \int f_n \Rightarrow \lim_n \int f_n = \int f$$

Παρατήρηση Η ύπαρξη $k: \int f_k < \infty$ είναι απαραίτητη γιατί η $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ είναι φθίνουσα $\int f_n = +\infty$ αλλά $f_n \longrightarrow 0$

άρα $\int \lim f_n = 0 \neq \lim_n \int f_n = +\infty$

Άσκηση 7.10.2 Έστω f μετρήσιμη $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\int f < \infty$. Δείξτε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\mu(A) < \infty$ κ $\int_A f > (\int f) - \varepsilon$

Λύση Αν $f \ge 0$ τότε $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ είναι αύξουσα (ελέγξτε το) κ $f_n \longrightarrow f$

Από ΘΜΣ $\int f_n \longrightarrow \int f$, άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\int f_{n_0} - \int f\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \int f\chi_{[-n_0,n_0]} - \int f$$

$$\Rightarrow \left(\int f\right) - \varepsilon < \int_{[-n_0,n_0]} f$$

Για τη γενική $f = f^+ - f^-$ βρίσκουμε $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε όπως πριν

$\left|\int_{A_1} f^+ - \int f^+\right| < \varepsilon/2$ κ $A_2 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\left|\int_{A_2} f^- - \int f^-\right| < \varepsilon/2$

Θέτουμε $A = A_1 \cup A_2$ και έχουμε

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^+ < \int_{A_1} f^+ \le \int_A f^+ \le \int f^+ < \int f^+ + \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2$$

Ομοίως

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^- < \int_{A_2} f^- \le \int_A f^- \le \int f^- < \int f^- + \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$$

Άρα $\left| \int_A f - \int f \right| = \left| \int_A f^+ - \int_A f^- - \int f^+ + \int f^- \right| \le$

$$\le \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| + \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \blacksquare$$

<u>Άσκηση 7.10.3</u> Βρείτε $f_n \rightrightarrows 0$ στο $\mathbb{R}$ αλλά $\int f_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$
και $g_n \longrightarrow 0$ στο $[0\ 1]$ αλλά $\int g_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Λύση</u> $f_n(x) = \frac{1}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) = n\, \chi_{[0\ \frac{1}{n}]}(x)$$

<u>Άσκηση 7.10.4</u> Αν $\mu(E) < \infty$ και $f_n \rightrightarrows f$ στο E και f_n ολοκληρώσιμες δείξτε ότι f ολοκληρώσιμη και

$$\lim_n \int f_n = \int f$$

<u>Λύση</u> (Υπενθύμιση f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $\int f^+, \int f^- < \infty \Leftrightarrow \int |f| < \infty$
$\Leftrightarrow$ $|f|$ ολοκληρώσιμη)

Αρκεί να δείξουμε ότι $|f|$ ολοκληρώσιμη. Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 7.7.2 (αφήνεται ως άσκηση) σελ 4

Ασκηση 7.10.5 Αν $\mu(E)<\infty$ f_n, f, g_n, g ολοκληρωσιμες (1)

με $f_n \longrightarrow f$ σπ $g_n \longrightarrow g$ σπ και $|f_n| \le g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (2)

και $\lim_n \int g_n = \int g$, δείξτε οτι $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$ (3)

Λύση Επαναλαμβανουμε την απόδειξη του ΘΚΣ εφαρμοζοντας το Λ. Fatou για τις (4)

(5)

$g_n - f_n \ge 0$ και $g_n + f_n \ge 0$

(αφου $|f_n| \le g_n \Longrightarrow -g_n \le f_n \le g_n$) (6)

(δική σας...)

Ασκηση 7.10.6 Αν f ολοκληρωσιμη τότε η (7)

$F(x) = \int_{(-\infty\, x]} f$ είναι συνεχής συνάρτηση του x, $x \in \mathbb{R}$. (8)

Λύση

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{(-\infty\, x]} f - \int_{(-\infty\, x_0]} f \right| = \left| \int_{(x_0, x)} f \right| \underset{\le \int_{(x_0 x)} |f|}{} \text{ ή } \left| \int_{(x, x_0)} f \right| \underset{\text{ή } \int_{(x x_0)} |f|}{}$$ (9) (10)

ανάλογα με το αν $x_0 > x$ ή $x_0 < x$. (11)

Από την Πρόταση 7.6.10 $\exists\, \delta > 0$ ωστε αν $\mu(E) < \delta$ (12)

$\Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon$. Άρα αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \mu\,(x_0\, x] < \delta$ ∎ (13)

$\Rightarrow$ $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{(x_0 x]} f \right| \le \int_{(x_0 x]} |f| < \varepsilon$