Μαθημα 26

Ασκηση 4.7.3 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ (i) Δείξτε ότι (1)

(2)

συγκλίνει στο $[0\ \infty)$ (3)

(ii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ \infty)$

(iii) ——//—— στο $[\delta, \infty)$ για $\delta > 0$ (4)

Λύση (i) $f_n = \dfrac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 =: f \quad \forall x \in [0\ \infty)$ (5)

(6)

(ii) $\sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \geq 0} \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$\left(\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \qquad = \qquad = 0 \Leftrightarrow$ (7)

(8)

$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{n}$

		$1/n$	
f_n'	$+$	0	$-$
f_n	$\nearrow$		$\searrow$

$\sup\limits_{x\geq 0} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$ (9)

Άρα $f_n \not\rightrightarrows f = 0$ στο $[0\ \infty)$ (10)

(11)

(iii) αν $\delta > 0 \ \exists n_0 : \frac{1}{n} < \delta \ \forall n \geq n_0$. Άρα $\forall n \geq n_0$

η $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $[\delta\ \infty)$ (12)

οπότε σύμφωνα με τον πίνακα είναι φθίνουσα με μέγιστη (13)

τιμή στο $x =$ ___ (14)

$\dfrac{n\cdot}{1+n^2\cdot} = \dfrac{}{\frac{1}{n}+n\cdot} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (15)

Άρα $f_n \rightrightarrows f = 0$ στο $[\delta\ \infty)$ (16)

Άσκηση 4.7.5 $\quad f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ (i) συγκλίνει (1)

στο $[0\ 1]$; (ii) ομοιόμορφα; (iii) στο $[\delta\ 1]$ για $\delta \in (0,1)$; (2)

(3)

Λύση (i) Αν $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$ (4)

Αν $x > 0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{e^{nx}} \longrightarrow 0$ (κριτήριο n-οστής ρίζας) (5)

(ελέγξτε το)

(ii) $\sup\limits_{x\in[0\,1]} |f_n(x)| \geq f_n(\quad) = \qquad = \qquad \longrightarrow +\infty$ (6)

(7)

άρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ στο $[0\ 1]$

(iii) $a_n = \sup\limits_{x\in[0\,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0\,1]} n^2 x e^{-nx} = \sup\limits_{x\in[0\,1]} f_n(x)$ (8)

$f_n'(x) = \qquad = 0 \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow x =$ (9)

$< \delta$ άρα στο $[\delta\ 1]$ (10)

Αν $\delta > 0$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ (11)

δεν έχουμε κρίσιμα σημεία. Συνεπώς

$a_n = \sup\limits_{x\in[\delta\,1]} f_n(x) = \max\{\qquad\} =$ (12)

(13)

$= \qquad \longrightarrow 0$. Άρα $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[\delta, 1]$

Άσκηση 4.7.10 (X, d) μετρικός χώρος, $\delta > 0$ $\quad f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (14)

(15)

$f_n(x) \geq \delta \quad \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightrightarrows f$ Δείξτε ότι

(16)

(i) $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X$ (ii) $\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{f}$

$\forall x \in X$ (17)

Λύση Έστω $n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\delta}{2}$ (18)

$< f(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow \forall x \in X \quad f(x) > \qquad = \quad > 0$

$\Rightarrow$

(ii) $\left| \dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f} \right| = \dfrac{|\qquad|}{|\quad|\ |\quad|}$ βρίσκουμε $n_0 : \forall n \geq n_0$ $\quad |f_n - f| < \dfrac{\varepsilon\delta^2}{2}$ (19)

οπότε

$\left| \dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f} \right| < \dfrac{\varepsilon\delta^2/2}{\frac{\delta}{2}\,\delta} = \varepsilon$ ∎ (20)

Άσκηση 4.7.14 | Αν $f_n \rightrightarrows f$ στο μετρικό χώρο E και f συνεχής

δείξτε ότι αν $x_n \in E$ και $x \in E$ και $x_n \longrightarrow x$ τότε $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

Λύση

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Αφού f συνεχής $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_1$ $\quad < \varepsilon/2$

Αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall$ $\quad \forall z \in E$

άρα και για $z = x_n$

Συνεπώς για $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ ■

Άσκηση 4.4.15 | ο (X, d) είναι συμπαγής μ.χ. $f_n : X \to \mathbb{R}$, f συνεχής $: X \to \mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X$ $\forall x_n \in X$ με $x_n \longrightarrow x$ ισχύει $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

Δείξτε ότι $f_n \rightrightarrows f$

Λύση Αν όχι $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \ge n_0 : \sup\limits_{x \in X} \ge \varepsilon$

Άρα $\exists\, x_n \in X$ ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon/2$

Ο X είναι συμπαγής άρα $\exists\, x_{n_k}$ υπακολουθία της x_n

που συγκλίνει. Ας ονομάσουμε x το όριό της

Τότε $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ αλλά $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \lim_k |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$$

$\xRightarrow{f \text{ συνεχής}}$ $|f(x) - f(x)| \ge \varepsilon/2$ άτοπο ■

σελ 4

Άσκηση 4.7.16 | $f_n : (0\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n & 0<x\le 1/n \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x} : (0\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) Δείξτε ότι $\forall x \in (0\ 1]$ $\forall x_n \in (0\ 1]$ με $x_n \longrightarrow x$

$f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

(ii) $f_n \not\rightrightarrows f$

Λύση (i) Έστω ότι $x \in (0\ 1]$ η $x_n \in (0\ 1]$ με $x_n \longrightarrow x$

$\exists\ n_1 \in \mathbb{N} :\ \forall n \ge n_1\ \ \frac{1}{n} < x$. Άρα $\frac{1}{n_1} < x$

$\exists\ x_2 \in \mathbb{N} :\ \forall n \ge n_2\ \ x_n > \frac{1}{n_1}$ λόγω $x_n \longrightarrow x$ (άσκηση)

Άρα $\forall n \ge \max\{n_1, n_2\}$ $x_n, x > \frac{1}{n}$

Συνεπώς $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x)$

(ii) $\sup_{x\in(0 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} \left|n - \frac{1}{x}\right|$ $\left(\text{λόγου } f_n(x) - f(x) = \left\{ \right. \right)$

$= +\infty \not\longrightarrow 0$ άρα $f_n \not\rightrightarrows f$.