Μάθημα 26

Άσκηση 4.7.3 | $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ (i) Δείξτε ότι συγκλίνει στο $[0,\infty)$

(ii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$

(iii) —//— στο $[\delta,\infty)$ για $\delta>0$

Λύση (i) $f_n = \dfrac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 =: f \quad \forall x\in[0,\infty)$

(ii) $\sup\limits_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n(1+n^2x^2)-nx\,2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0 \iff$$

$\iff n-n^3x^2=0 \iff x=\dfrac{1}{n}$ ($-\frac{1}{n}$ απορ. αφού $\notin[0,\infty)$)

	0		$1/n$	
f_n'		$+$	0	$-$
f_n		$\nearrow$		$\searrow$

$\sup\limits_{x\geq 0}\dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}\not\to 0$

άρα $f_n \not\rightrightarrows f=0$ στο $[0,\infty)$

(iii) αν $\delta>0$ $\exists n_0 : \frac{1}{n}<\delta$ $\forall n\geq n_0$. Άρα $\forall n\geq n_0$

η $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $[\delta,\infty)$

οπότε σύμφωνα με τον πίνακα είναι φθίνουσα με μέγιστη τιμή στο $x=\delta$

$$\frac{n\cdot\delta}{1+n^2\cdot\delta^2} = \frac{\delta}{\frac{1}{n}+n\cdot\delta^2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Άρα $f_n \rightrightarrows f=0$ στο $[\delta,\infty)$

Άσκηση 47.5 $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ (i) συγκλίνει σημειακά στο $[0\ 1]$; (ii) ομοιόμορφα; (iii) στο $[\delta\ 1]$ για $\delta\in(0\ 1)$;

Λύση (i) Αν $x=0$ $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Αν $x>0$ $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{e^{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (κριτήριο n-οστής ρίζας)

(ελέγξτε το)

(ii) $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}} = ne^{-1} \longrightarrow +\infty$

άρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ στο $[0\ 1]$

(iii) $a_n = \sup\limits_{x\in[\delta,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[\delta,1]} n^2xe^{-nx} = \sup\limits_{x\in[\delta,1]} f_n(x)$

$f_n'(x) = n^2e^{-nx} - n^3xe^{-nx} = 0 \Leftrightarrow 1-nx=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{n}$

αν $\delta>0$ $\exists n_0$ $\forall n\geq n_0$ $\frac{1}{n}<\delta$ άρα στο $[\delta\ 1]$ δεν έχουμε κρίσιμα σημεία. Συνεπώς

$a_n = \sup\limits_{x\in[\delta,1]} f_n(x) = \max\{f_n(\delta), f_n(1)\} = \max\{n^2\delta e^{-n\delta}, n^2e^{-n}\}$

$= n^2\delta e^{-n\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (κριτήριο ρίζας). Άρα $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[\delta\ 1]$

Άσκηση 47.10 (X,d) μετρικός χώρος, $\delta>0$ $f_n: X\to\mathbb{R}$. Αν $f_n \rightrightarrows f$ Δείξτε ότι

$f_n(x)\geq\delta$ $\forall x\in X$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

(i) $f(x)\neq 0$ $\forall x\in X$ (ii) $\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{f}$

Λύση Έστω n_0: $\forall n\geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\delta}{2}$ $\forall x\in X$

$\Rightarrow$ $f_n(x)-\frac{\delta}{2} < f(x)$ $\forall x\in X$ $\Rightarrow$ $\forall x\in X$ $f(x) > \frac{\delta}{2} > 0$

(ii) $\left|\dfrac{1}{f_n}-\dfrac{1}{f}\right| = \dfrac{|f-f_n|}{|ff_n|}$ βρίσκουμε n_0: $\forall n\geq n_0$ $|f_n-f| < \frac{\varepsilon\delta^2}{2}$ οπότε

$\left|\dfrac{1}{f_n}-\dfrac{1}{f}\right| < \dfrac{\varepsilon\delta^2/2}{\frac{\delta}{2}\delta} = \varepsilon$ ■

Άσκηση 4.7.14 | Αν $f_n \rightrightarrows f$ στο E και f συνεχής

Δείξτε ότι αν $x_n \in E$ και $x \in E$ και $x_n \to x$ τότε $f_n(x_n) \to f(x)$

Λύση

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Αφού f συνεχής $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_1$ $\quad |f(x_n)-f(x)| < \varepsilon/2$

Αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\quad \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_2\ \forall z \in E \quad |f_n(z)-f(z)| < \varepsilon/2$

άρα και για $z = x_n$

Συνεπώς για $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ $\quad |f_n(x_n)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άσκηση 4.4.15 | ο (X, d) είναι συμπαγής μ.χ. $f_n : X \to \mathbb{R}$, f συνεχής$: X \to \mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X\ \forall x_n \in X$ με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$

Δείξτε ότι $f_n \rightrightarrows f$

Λύση Αν όχι $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \ge n_0 : \sup_{x \in X} |f_n(x)-f(x)| \ge \varepsilon$

Άρα $\exists x_n \in X$ ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon/2$

Ο X είναι συμπαγής άρα $\exists x_{n_k}$ υπακολουθία της x_n που συγκλίνει. Ας συμβολίσουμε x το όριό της.

Τότε $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ αλλά $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \lim_k |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$$

$$\overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} \quad |f(x) - f(x)| \ge \varepsilon/2 \quad \text{άτοπο}$$

Άσκηση 4.7.16 $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n & 0<x\le 1/n \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x} : (0,1] \to \mathbb{R}$

(i) Δείξτε ότι $\forall x \in (0,1]$ $\forall x_n \in (0,1]$ με $x_n \to x$

$f_n(x_n) \to f(x)$

(ii) $f_n \not\rightrightarrows f$

Λύση (i) Έστω ότι $x \in (0,1]$ και $x_n \in (0,1]$ με $x_n \to x$

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \ge n_1 \quad \frac{1}{n} < x$. Άρα $\frac{1}{n_1} < x$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \ge n_2 \quad x_n > \frac{1}{n_1}$ αφού $x_n \to x$ (ακολουθία)

$\boxed{\text{Άρα } \forall n \ge \max\{n_1, n_2\} \quad x_n, x > \frac{1}{n}}$

Συνεπώς $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x)$

(ii) $\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} \left| n - \frac{1}{x} \right|$ $\left(\text{αφού } f_n(x) - f(x) = \begin{cases} n - \frac{1}{x} & 0<x\le 1/n \\ 0 & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \right)$

$= +\infty \not\to 0$ άρα $f_n \not\rightrightarrows f$.