Μάθημα 1°

ονομάζουμε οποιαδήποτε συνάρτηση

<u>Επανάληψη στις ακολουθίες</u> Ακολουθία $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

π.χ. $\alpha(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ομοίως ονομάζαμε _ _ _ _ _ _ _ _

οποιαδήποτε συνάρτηση $\alpha : A \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο σύνολο

π.χ. $\alpha : \{\text{άρτιοι}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ π.χ. $\alpha(2\cdot) = \frac{1}{\quad}$

$\{2\cdot \_\_\_\}$

Συνήθως χρησιμοποιούμε γράμματα όπως a, b, γ, x, y, t, s
(και όχι f, g, h) για τις ακολουθίες.

Επιπλέον αντί για $a(n)$, $\gamma(n)$ $y(n)$ κλπ γράφουμε

a_n γ_n y_n κλπ.

Κάθε τιμή της ακολουθίας α [redacted] ονομάζεται και <u>όρος</u> της a

$a_1, a_2, a_{15}, a_{832}$ είναι όροι της ακολουθίας a δηλαδή
είναι οι τιμές της $a(1)$, $a(2)$, $a(15)$, $a(832)$

Συνήθως δεν λέμε «η ακολουθία a» αλλά «η ακολουθία a_n»
(το αντίστοιχο για τις συναρτήσεις είναι να προτιμούσαμε το
$f(x)$ από το f)

$\forall$ $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_n : n \geq m\}$ ονομάζεται [redacted]
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ της a_n. Π.χ. Αν $a_n = \frac{1}{n}$

$a_{10} = \_\_\_$ $a_{52} = \_\_\_$ $\{a_n : n \geq 85\} = \left\{\frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \dots\right\}$

ΣΕΔ 2

Λέμε ότι $a_n \longrightarrow 0$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ή $\lim a_n = 0$ (1)

αν $\forall \quad \exists \quad = \quad \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \quad \forall n \geq$ (2)

Πχ Η $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ (παρόλο που πλησιάζει και το $\frac{-1}{100\pi}$) (3)

Πράγματι αν μας ζητήσουν να ελέγξουμε αν τελικά βρίσκεται (4)

σε απόσταση $\varepsilon > 0$ από το 0 δεν έχουμε παρά να ελέγξουμε (5)

αν $|\;-\;| \iff n \geq \frac{1}{\quad}$ Το ζητούμενο (6)

λοιπόν είναι σωστό όταν $n > \ldots$ θέτουμε $n_0 =$ (7)

(8)

η ισχύει η γραμμή (2).

$a_n \not\longrightarrow -\frac{1}{100\pi}$ (παρόλο που το πλησιάζει) (9)

~~Αλλα~~ Θα το δούμε αυτό αφού θυμηθούμε τον ορισμό σύγκλισης (10)

<u>Ορισμός</u> Μια ακολουθία $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ λέμε ότι συγκλίνει στο ℓ (11)

και γράφουμε $a_n \longrightarrow \ell$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ldots$ ή $\lim a_n = \ldots$ (12)

αν η ακολουθία $x_n = a_n - \ell$ έχει όριο το μηδέν. Δηλαδή (13)

αν

$\forall \quad \exists \quad = \quad \in \mathbb{N}$ ώστε $|\overbrace{\qquad\qquad}^{x_n}| < \quad \forall n \geq$ (14)

Η $a_n = \frac{1}{n}$ παρόλο που πλησιάζει το $-\frac{1}{100\pi}$ <u>δεν</u> συγκλίνει (15)

σε αυτό διότι αν μας ζητήσουν να βρούμε πότε (16)

απέχει από αυτό λιγότερο από ~~$\frac{1}{2000}$~~ $\frac{1}{1000}$ (17)

Τότε θα θέλαμε $\left|\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{100\pi}\right)\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1000} < \qquad + \qquad < \frac{1}{1000}$ (2)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1000} - \frac{1}{100\pi} < \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} - \frac{1}{100\pi}$ (3)

$\Leftrightarrow -\frac{1000+100\pi}{10^5\pi} < \frac{1}{n} < -\frac{1000-100\pi}{10^5\pi}$ (4)

το οποίο είναι ανέφικτο διότι __________ . (5)

Στον ΑΠ ΛΟΓ 1 έχουν αποδειχθεί τα εξής: (6)

Το όριο είναι _____ (όταν υπάρχει), αν $x_n \longrightarrow \ell_1$ και $y_n \longrightarrow \ell_2$ (7)

Τότε $x_n \pm y_n \longrightarrow \ell_1 \pm \ell_2$, $x_n y_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$, αν $\ell_2 \neq 0$ (8)

$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}$ (για τα n για τα οποία $y_n \neq 0$), $|x_n| \longrightarrow$ (9)

$x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \qquad \forall k>0$ και $\forall k<0$ (όταν $x_n \neq 0$ και) $\ell_1 \neq 0$ (10)

$\sqrt[k]{x_n} \longrightarrow \qquad$ αν $x_n \geq 0$. (11)

Αν $x_n \leq z_n \leq y_n$ και $\lim x_n = \lim y_n = \ell$ τότε (12)

$\lim \qquad = \qquad .$ (13)

<u>Ορισμός</u> Αν $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρα σύνολα και $a_n: A \longrightarrow \mathbb{R}$ (14)

μια ακολουθία τότε ο περιορισμός $a_n\big|_{n\in B}$ ονομάζεται υπακολουθία (15)

της a_n.

π.χ.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	... (16)
$a_n=$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	... (17)
	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{7}$		... = (18)

$= a_n \Big|_{n\in\{\text{περιττοί}\}}$ είναι υπακολουθία της a_n

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ με $k_n = 2n-1$

τότε φανερά $a_n \Big|_{n\in\{\text{περιττός}\}} = (a \circ k)(n) = a(k(n)) = a_{k_n} =$

$$= a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

Δηλαδή η <u>ακολουθία</u> $\frac{1}{2n-1}$ <u>ΕΙΝΑΙ</u> υπακολουθία της $\frac{1}{n}$. Άλλωστε τους όρους δίνει η $\frac{1}{2n-1}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

Έτσι συχνά μια υπακολουθία γράφεται ως ακολουθία της μορφής a_{k_n}. Δεν είναι όμως απαραίτητο ότι υπάρχει τύπος για την k_n. Π.χ. Αν από την $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ κρατήσω μόνο τους όρους που το n είναι μια δύναμη του 2 δηλ. τους $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$ έχω την υπακολουθία a_{2^n} της $a_n = \frac{1}{n}$ και μπορώ να γράψω τύπο: είναι η $\frac{1}{2^n}$

Ενώ αν από την $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ κρατήσω μόνο τους όρους με παρονομαστή πρώτο αριθμό δηλ. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \dots$ αυτή είναι μια υπακολουθία $a_{p(n)}$ της a_n με $p(n)$ ο n-οστός πρώτος αριθμός αλλά δεν έχω τύπο για την $a_{p(n)}$ (ούτε για την $p(n)$)