# Μάθημα 2ο

Θεώρημα: κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
Ειδικότερα αν $a_n \uparrow$ ($a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και
$a_n$ άνω φραγμένη ($\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \le M$) τότε

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ή αν $a_n \downarrow$ ($a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και
$a_n$ κάτω φραγμένη ($\exists m$ ώστε $a_n \ge m$)
τότε

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Απόδειξη: (Επειδή $a_n \uparrow$ κ άνω φρ.) Αφού $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ άνω φραγμένο σύνολο υπάρχει
το $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

Φανερά $a_n \le s$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι
$a_n \longrightarrow s$. Ας υποθέσουμε ότι μας ρωτάνε πότε οι όροι
της $a_n$ θα απέχουν από το $s$ απόσταση λιγότερη από $\varepsilon > 0$
Μας ζητούν δηλαδή να επιβεβαιώσουμε ότι θα συμβεί η
$|a_n - s| < \varepsilon$ από κάποιο $n_0$ κ μετά.
$\Longleftrightarrow$ $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$. Την δεξιά την ξέρουμε
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αφού ακόμα καλύτερα $a_n \le s$. Άρα το ζητούμενο
είναι πότε ισχύει η αριστερή.
Όμως το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

διότι το $s$ ήταν το ελάχιστο άνω φράγμα του... Άρα

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s-\varepsilon < a_{n_0}$ Επειδή τώρα $a_n \uparrow$

$\forall\, n \geq n_0 \quad s-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s+\varepsilon$

άρα $\forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - s| < \varepsilon$ ■

<u>Θεώρημα Bolzano–Weierstrass</u> κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(Σκεφτείτε ένα τρόπο να εξηγήσετε γιατί κάθε ακολουθία έχει <u>μονότονη</u> υπακολουθία)

<u>Ορισμός</u> $a_n \longrightarrow +\infty$ αν $\forall M>0 \ \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}: \ a_n > M \ \forall n \geq n_0$

$a_n \longrightarrow -\infty$ αν $\forall M>0 \ \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}: \ a_n < -M \ \forall n \geq n_0$

<u>Βασικά όρια</u> $\lambda^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{αν } |\lambda|<1 \\ 1 & \text{αν } \lambda = 1 \\ +\infty & \text{αν } \lambda > 1 \\ \nexists & \text{αν } \lambda \leq -1. \end{cases}$

$\forall\, a>0 \quad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1, \qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

Αν $a_n \longrightarrow \ell > 0 \implies \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$

Αν $a_n \longrightarrow 0 \quad a_n > -1 \implies (1+a_n)^p \longrightarrow 1 \quad \forall\, p \in \mathbb{R}$

Αν $a_n \longrightarrow 0 \quad \dfrac{\sin(a_n)}{a_n} \longrightarrow 1, \quad \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} \longrightarrow 1,$

$\dfrac{\log n}{n} \longrightarrow 0 \qquad \dfrac{\log(1+a_n)}{a_n} \longrightarrow 1$

<u>Ορισμός</u> (ακολουθία Cauchy) Μια ακολουθία $a_n$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall_{m,n \geq n_0} \text{ ισχύει } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

<u>Θεώρημα</u> Μια ακολουθία $a_n$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ ~~συγκλ~~ συγκλίνει $\iff$ είναι ακολουθία Cauchy

<u>Πρόταση</u> $a_n \longrightarrow \ell \iff \forall k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(k_n \uparrow)$ η υπακολουθία $a_{k_n} \longrightarrow \ell$

## Γενικά περί Σειρών

<u>Ορισμός</u> Θεωρούμε μια ακολουθία $a_n$ πραγματικών αριθμών και ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ θέτοντας

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Η νέα αυτή ακολουθία $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται <u>σειρά</u> της $a_n$

Προσοχή: Σειρά είναι η $S_N$ που φτιάχνεται όπως παραπάνω από την $a_n$. <u>ΔΕΝ</u> είναι η $a_n$ η σειρά

Σειρά της $a_n$ είναι η ακολουθία $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ενώ κάθε όρος αυτής, δηλαδή κάθε $S_N$, ονομάζεται μερικό άθροισμα της σειράς ή μερικό άθροισμα της $a_n$.

Άρα αφού τα $S_N$ λέγονται «μερικά αθροίσματα» η σειρά της $a_n$

είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $a_n$.

<u>Παράδειγμα</u> (Η γεωμετρική σειρά) Ας πάρουμε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία $a_n = \lambda^n$. Η σειρά της δηλαδή η ακολουθία $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ με

$$S_N = a_1 + \dots + a_N = \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^N$$

ονομάζεται γεωμετρική σειρά με <u>λόγο $\lambda$</u>

$\hookrightarrow$ (από το ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = \lambda$ )

Πολλές φορές αυτό το μερικό άθροισμα όπως το προηγούμενο μπορεί να υπολογιστεί σε «κλειστή μορφή».

Γνωρίζουμε από το Λύκειο ότι $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^N = \dfrac{\lambda - \lambda^{N+1}}{1-\lambda}$

(γιατί;)

Οπότε $S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n = \dfrac{\lambda - \lambda^{N+1}}{1-\lambda}$.

Άλλοτε πάλι τέτοιος υπολογισμός δεν είναι εφικτός

π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

Αν η $S_N$ συγκλίνει καθώς $N \to \infty$ λέμε ότι η σειρά της $a_n$ συγκλίνει, και αν το όριο είναι το $L$ γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \Big( \text{εννοώντας}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = L \Big)$$