ΜΑΘΗΜΑ 7°

Άσκηση

Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ και $\sum \frac{n^p}{n!}$

Λύση: Αν $a_n = \frac{1}{n!}$, τότε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$

Άρα η $\sum \frac{1}{n!}$ συγκλίνει

Αν $a_n = \frac{n^p}{n!} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$

$= \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow 0\cdot 1 = 0 < 1$

Άρα η $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ συγκλίνει

Άσκηση: $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, (δύσκολη:) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$

Άσκηση: Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}$ για $a \in \mathbb{R}$

Άσκηση: Βρείτε για ποια $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)\cdot(3n)!}{(4n)!} x^n$$

Λύση: Θέτω $a_n = \frac{3^n x^n}{n^3}$ οπότε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n x^n}{n^3}}\right| =$

$= \frac{3|x|\, n^3}{(n+1)^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3|x|$. Άρα αν $|x| < \frac{1}{3}$ η σειρά

συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| > \frac{1}{3}$ η σειρά αποκλίνει

και μένει η περίπτωση $x = \frac{1}{3}$ και ($x = -\frac{1}{3}$)

Αν $x = \frac{1}{3}$ η σειρά είναι ίση με την $\sum \frac{1}{n^3} < \infty$

(Αν $x = -\frac{1}{3}$ —— // —— $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ συγκλίνει απολύτως)

άρα συγκλίνει

Το κριτήριο της n-οστής ρίζας του Cauchy

<u>Πρόταση</u> (κριτήριο n-οστής ρίζας του Cauchy) (σύγκριση με την γεωμετρική σειρά)

$\forall\, a_n \in \mathbb{R}$

- αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως
- αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει.

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$. Αν $\ell < 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$ οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\left|\sqrt[n]{|a_n|} - \ell\right| < \frac{1-\ell}{2}$

$\Longrightarrow |a_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Αλλά η σειρά $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ συγκλίνει γιατί $\frac{1+\ell}{2} < 1$ άρα συγκλίνει και η $\sum |a_n|$

Αν τώρα $\ell > 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό για $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$ οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\left|\sqrt[n]{|a_n|} - \ell\right| < \frac{\ell-1}{2} \Longrightarrow$

$$\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n < |a_n| \Longrightarrow a_n \not\to 0 \quad \text{αφού} \quad \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \longrightarrow +\infty$$

Άρα $\sum a_n$ <u>αποκλίνει</u> ∎

<u>Παρατήρηση</u> $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ και η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$ και η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Άρα δεν γίνεται να ξέρουμε την σύγκλιση της $\sum a_n$ μόνο από το αν $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 1$.

σελ 3

Ασκήσεις $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$: $\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$ (1)

άρα η $\sum \frac{n}{2^n}$ συγκλίνει (2)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{e^n}$: $\sqrt[n]{\left|\frac{n^p}{e^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}^{\,p}}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$ (3)

$\Rightarrow$ η $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{e^n}$ συγκλίνει (4)

$x \geq 0$ $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$ $\sqrt[n]{\left|\frac{2^n x^n}{n^2}\right|} = |x| \frac{2}{\sqrt[n]{n}^{\,2}} \longrightarrow 2|x|$ (5)

αν $|x| < \frac{1}{2}$ η σειρά συγκλίνει απολύτως άρα και απλά (6)

αν $|x| > \frac{1}{2}$ η σειρά αποκλίνει (7)

αν $x = \frac{1}{2}$ η σειρά $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (8)

(αν $x = -\frac{1}{2}$ η σειρά $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει (9)

βέβαια συγκλίνει απολύτως)

$\sum \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$: $\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} = \frac{n!}{n^n} \longrightarrow ?$ (10)

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{n!}{n^n} \to 0$$

Συνεπώς $\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} \longrightarrow 0 < 1$ άρα η $\sum \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ συγκλίνει

Εναλλάσουσες σειρές

Πρόταση (κριτήριο Leibniz) Αν $a_n \downarrow$ & $a_n \longrightarrow 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει

Απόδειξη Εύκολα βλέπουμε ότι $s_{2N} \downarrow$ διότι

$$s_{2(N+1)} - s_{2N} = (-1)^{2N+1} a_{2N+1} + (-1)^{2N+2} a_{2N+2} =$$

$$= a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$$

Άρα $s_{2(N+1)} \leq s_{2N}$.

Αντιθέτως $s_{2N-1} \uparrow$ διότι $s_{2(N+1)-1} - s_{2N-1} =$

$$= s_{2N+1} - s_{2N-1} = (-1)^{2N} a_{2N} + (-1)^{2N+1} a_{2N+1} =$$

$$= a_{2N} - a_{2N+1} > 0$$

άρα $s_{2(N+1)-1} > s_{2N-1}$. Επιπλέον $s_{2N-1} \leq s_{2N}$ διότι

$s_{2N} - s_{2N-1} = (-1)^{2N} a_{2N} \geq 0$. Άρα

$$s_1 \leq s_{2N-1} \leq s_{2N} \leq s_2$$

Άρα οι s_{2N-1} & s_{2N} συγκλίνουν (γιατί είναι μονότονες και φραγμένες) και μάλιστα συγκλίνουν στο ίδιο όριο

αφού $s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N} \longrightarrow 0$. Συνεπώς και η s_{2N} & η s_{2N-1} συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, άρα η s_N είναι συγκλίνουσα.

[ακολουθίες: αν $x_{2N} \longrightarrow \ell$ & $x_{2N-1} \longrightarrow \ell \Rightarrow x_N \longrightarrow \ell$]

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (παρόλο που η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει)

αφού $\frac{1}{n} \downarrow$ & $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

Άσκηση $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{a}{n}$ $\quad a\in\mathbb{R}$

Λύση Φανερά $\frac{\cos(a/n)}{n} \longrightarrow 0$. Άρα αν είναι και φθίνουσα θα προκύψει η σύγκλιση της σειράς από το κριτήριο Dirichlet. Θέτουμε $f(x)=\frac{\cos(a/x)}{x}$ για $x \geq 1$ ή

Ελέγχουμε την μονοτονία της: $f'(x) = \frac{\left(-\sin\frac{a}{x}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right)x - \cos\frac{a}{x}}{x^2}$

$$= \frac{\frac{a}{x}\sin\frac{a}{x} - \cos\frac{a}{x}}{x^2} < 0 \quad \text{για μεγάλα } x$$

διότι $\frac{1}{x^2} > 0$ & $\frac{a \sin a/x}{x} - \cos\frac{a}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0-\cos 0 = -1$

Συνεπώς $\exists n_0$ ώστε $\forall n \geq n_0$ η $\frac{1}{n}\cos\frac{a}{n} \downarrow$

άρα η $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\cos\frac{a}{n}$ συγκλίνει άρα και η αρχική.

Άσκηση $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}}$ $\quad p,q\in\mathbb{R}$.

Λύση Αν $q>0$ $n^p e^{q\sqrt{n}} = e^{p\log n} e^{q\sqrt{n}} = e^{p\log n + q\sqrt{n}}$
$= e^{\sqrt{n}\left(p\frac{\log n}{\sqrt{n}} + q\right)} \longrightarrow +\infty$ διότι $\frac{\log n}{\sqrt{n}} = 4\frac{\log\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \leq$
$\leq 4\frac{\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Άρα $(-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}} \not\to 0$ και η σειρά αποκλίνει.

Αν $q=0$ $\quad p\geq 0$ αποκλίνει (γιατί $(-1)^n n^p \not\to 0$)
$\quad p<0$ συγκλίνει (γιατί $\frac{1}{n^{|p|}} \downarrow \geq 0$ + Leibniz)

Αν $q<0$ Ελέγξτε ότι η $f(x) = x^p e^{q\sqrt{x}}$ είναι τελικά φθίνουσα (δηλ. $\exists x_0: \forall x\geq x_0$ $f\downarrow$) οπότε η $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} (-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}}$ συγκλίνει άρα και η αρχική.

→ να ελεγχθεί ότι $n^p e^{q\sqrt{n}} \to 0$ όταν $q<0$.