ΜΑΘΗΜΑ 8°

Αναδιατάξεις σειρών: Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην «άθροιση» των απείρων όρων μιας σειράς;

<u>Παράδειγμα</u> Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει. Ας ονομάσουμε ℓ το όριό της, δηλαδή $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

$$\ell = \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{(-)} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{(-)} - \cdots \underbrace{- \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1}}_{(-)} \Big) \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Αλλάζουμε τώρα τη σειρά της άθροισης ώστε κάθε αρνητικός όρος να εμφανίζεται αφού εμφανιστούν <u>δύο</u> θετικοί:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε τριάδα όρων είναι της μορφής:

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{8k-3}{(4k-3)(4k-1)(2k)} \geq 0$$

Άρα

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{(+)} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{(+)} + \cdots > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \geq \ell$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αλλάζοντας τη σειρά της άθροισης οδηγούμαστε σε άλλο αποτέλεσμα (η όχι στο αρχικό όριο ℓ).

Για να μιλήσουμε για αυτό το θέμα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα τρόπο να γράφουμε αυστηρά την αλλαγή της σειράς αθροισης.

<u>Ορισμός</u> Μια συνάρτηση (ακολουθία) $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία είναι <u>1-1</u> και επί ονομάζεται <u>αναδιάταξη</u> του $\mathbb{N}$.

Π.χ. $k_n = \begin{cases} n-1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ n+1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k_n	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12

<u>Ορισμός</u> Αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια αναδιάταξη του $\mathbb{N}$, η ακολουθία $a'_n = a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της ακολουθίας a_n και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ αναδιάταξη της $\sum_{1}^{\infty} a_n$.

<u>Λήμμα 1</u> Αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 1-1 τότε $k_n \longrightarrow +\infty$

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι $M > 0$. Θέτουμε $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το $K \cap \{1, 2, \dots, [M]+1\}$ είναι <u>πεπερασμένο</u> με το πολύ $[M]+1$ στοιχεία. Έστω ότι $K \cap \{1, 2, \dots, [M]+1\} = \{k_{n_1}, k_{n_2}, \dots, k_{n_r}\}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_r\} + 1$. Αν $n \geq n_0$ $k_n \notin \{k_{n_1}, \dots, k_{n_r}\}$ γιατί η k_n <u>1-1</u>

Άρα $k_n \geq [M]+1 > M \Rightarrow k_n \longrightarrow +\infty$ ■

<u>Λήμμα 2</u> Αν k_n αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ τότε $\forall N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m = m(N) \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$

<u>Απόδειξη</u> Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1 για $M = N+1$. Οπότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq m$ $k_n \geq N+1$. Συνεπώς αφού k_n επί (ως <u>αναδιάταξη</u>) οι αριθμοί $1, 2, \dots, N$ είναι τιμές της k_n για $n < m$ δηλαδή $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ ■

Πρόταση Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.

Απόδειξη Έστω ότι k_n αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ και $\sum a_n$ σειρά που συγκλίνει απολύτως. Ας θέσουμε $\ell = \sum_{1}^{\infty} a_n$. Θα δείξουμε ότι $\sum a_{k_n} = \ell$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum |a_n|$ συγκλίνει τα μερικά της αθροίσματα είναι Cauchy. Άρα $\exists\, N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, N > M \geq N_0$ να ισχύει $\sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon/2$.

Αφήνοντας $N \to +\infty \Longrightarrow \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon/2$. Άρα $\forall\, M \geq N_0$ ισχύει $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Άρα και για $M = N_0$ δηλ. $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$.

Από το προηγούμενο λήμμα για το N_0 υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\{1, 2, \dots, N_0\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_{m_0}\}$$

Έστω τώρα ότι $m \geq m_0$. Έχουμε $\left| \ell - \sum_{n=1}^{m} a_{k_n} \right| =$

$$= \left| \sum_{n \notin \{k_1, \dots, k_m\}} a_n \right| \leq \sum_{n \notin \{k_1 \dots k_m\}} |a_n| \leq$$

$$\leq \sum_{n \notin \{k_1, k_2 \dots k_{m_0}\}} |a_n| \leq \sum_{n \notin \{1, 2, \dots, N_0\}} |a_n| = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

∎

Το Θεώρημα Riemann

Θεώρημα Για κάθε a_n ώστε $\sum^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ και $\forall\, x \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη a_{k_n} της a_n ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$$

Άσκηση. Αν $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$ υπάρχει αναδιάταξη a'_n της a_n ώστε

$\sum a'_n = e$;

Λύση. $\cos(n\pi) = (-1)^{n-1}$. Η $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει

(γιατί; είναι εναλλάσσουσα η $\frac{1}{n}\downarrow \geq 0$, $\frac{1}{n} \to 0$, άρα συγκλίνει από το κρ. Leibnitz

η η $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ αποκλίνει. Άρα από το Θ. Riemann

υπάρχει αναδιάταξη a'_n ώστε $\sum a'_n = e$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ Η τάξη μεγέθους του παρονομαστή είναι

$(n^3)^{1/2} = n^{3/2}$. Θέτω $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ η

υπολογίζω το $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{3/2}}}{\cancel{n^{3/2}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}}$

$= 1 > 0$. Επειδή $\sum b_n$ συγκλίνει (γιατί $3/2 > 1$)

$\Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει

(2) Για ποια a η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{n^a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}^{a_n}$ συγκλίνει;

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^a \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Συγκρίνουμε οριακά με την $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \longrightarrow 1$ Άρα η $\sum a_n$

συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum b_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \alpha > 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$