Μάθημα 9ο

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$$. Λύση Α (Θυμόμαστε τους τύπους $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (1)
και $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\cancel{n(n+1)}}{2}}{\frac{\cancel{n(n+1)}(2n+1)}{6}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+1} = +\infty \left(\text{σύγκριση με την } \sum \tfrac{1}{n}\right)$$ (2)

(3)

Λύση Β (δεν θυμόμαστε τον τύπο $1^2+2^2+\dots+n^2$)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n\cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \frac{1}{2}\sum \frac{n+1}{n^2} \geq \frac{1}{2}\sum \frac{n}{n^2} = +\infty$$ (4)

(5)

Λύση Γ (δεν θυμόμαστε κανένα τύπο) (6)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{n}{2}\right]+\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\dots+n}{n\cdot n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]+1 \text{ όροι}}}{n^3}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\Big(\underbrace{n-\left[\frac{n}{2}\right]+1}_{\geq \frac{n}{2}+1}\Big) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}$$ (7)

$n=2 \longleftarrow$ από 2 γιατί $[1/2]=0$ (8)

$$\geq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\right)\frac{n}{2} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{n}{4}\,\frac{n}{2} = \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

(9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n} = +\infty$$

(10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, n^{1/n}} \geq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{1}{n} = +\infty$$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της $n^{1/n}$; $(=\sqrt[3]{3})$ (12)

(Η $f(x)=x^{x}=e^{x\log x}$ έχει μέγιστη τιμή στο $x=e$ και είναι αύξουσα πριν το e η φθίνουσα μετά. Άρα η $\sqrt[n]{n}$ έχει μέγιστο είτε στο $\sqrt[2]{2}$ είτε στο $\sqrt[3]{3}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad (1)$$

<u>Πόσο κάνει ακριβώς;</u> $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Leftrightarrow$ (2)

$$\Leftrightarrow 1 = (n+2)A + nB = n(A+B) + 2A \qquad (3)$$

$$\Rightarrow A = 1/2 \qquad B = -1/2$$

Άρα $\sum \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$ (4)

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right) \qquad (5)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \lim \frac{1}{n} - 1\right) = 3/4 \qquad (6)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} \le \sum_{1}^{\infty} \frac{3n+2n}{n \cdot n \cdot n} = 5 \sum \frac{1}{n^2} < \infty \qquad (7)$$

<u>Ακριβής υπολογισμός;</u> $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ (8)

(9)

$$3n+2 = (n+1)(n+2)A + n(n+2)B + n(n+1)C \qquad (10)$$

$$= (n^2+3n+2)A + (n^2+2n)B + (n^2+n)C$$

$$= (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + (2A) \qquad (11)$$

$$\Rightarrow 2A = 2, \quad 3A+2B+C = 3, \quad A+B+C = 0 \qquad (12)$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 1, \quad C = -2 \qquad (13)$$

$$\sum \frac{3n^{\cancel{2}}+2}{n(n+1)(n+2)} = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = \qquad (14)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right) = \ldots \qquad (15)$$

(σελ 3)

(τηλεσκοπική) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \log \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left((n-1)\log(n+1) - n\log n \right)$ (1)

$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log n}{n-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{2-1}$ (2)

$= - \log 2$ (3)

(τηλεσκοπική) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1 \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^n} - \frac{1}{n^n} \right)$ (4)

$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{n^n} \right) = \lim \frac{1}{n^n} - \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ (5)

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5+(-1)^n} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5-1} \right)^n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$ (6)

≥ 0 άρα η $S_N = \sum_{0}^{N}$ είναι αύξουσα. Από το προηγούμενο (7)

είναι και άνω φραγμένη άρα συγκλίνει (8)

$\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}}_{\geq 0} \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{(2n+5n)\sqrt{n^4+n^4}}{3n^5} = \sum \frac{7n\, n^2 \sqrt{2}}{3n^5} =$ (9)

$= \frac{7\sqrt{2}}{3} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (10)

Με οριακή σύγκριση: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}$ (11)

$= \lim \frac{n^2 \cdot n \cdot n^2 \left(2+\frac{5}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{n^5\left(3+1/n^5\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{5}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{3+\frac{1}{n^5}} = \frac{2}{3} > 0$ (12)

άρα η σειρά συγκλίνει αφού $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (13)

$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2 \leq \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^3} \right)^2 = 4 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ (14)

(σελ 4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}} : \quad a_n = \frac{n!}{2^{2n}}, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}}{\frac{n!}{4^n}} \right| = \qquad (1)$$

απoκλίνει

$$= \frac{n+1}{4} = \qquad = \quad \to +\infty \qquad (2)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n} : \quad \sqrt[n]{\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}\right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \qquad (3)$$

συγκλίνει

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}}{e^n} : \quad \sqrt[n]{\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}}{e^n}\right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}}{e} = \frac{\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}}{e} \to \frac{e^{1/2}}{e} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \qquad (4)$$

συγκλίνει

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n : \quad \sqrt[n]{\left|\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n\right|} = \sqrt[n]{n} - 1 \longrightarrow 0 < 1 \qquad (5)$$

συγκλίνει

(6)

(Β-τρόπος)

Αλλιώς: $\sqrt[n]{n} - 1 \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$

$$\text{άρα} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty \qquad (7)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\sqrt{n}} \;; \qquad (8)$$

Αν πάμε με n-οστή ρίζα θα οδηγηθούμε

$$\text{στο όριο} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \;; \qquad (9)$$

Όμως με το Β-τρόπο όπως πριν $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$ (10)

$$\text{Άρα} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{[\sqrt{n}]}} \leq \sum_{k=[\sqrt{n_0}]}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k} < \infty \qquad (11)$$

όταν $[\sqrt{n}]=k$ για να φτάσει το $[\sqrt{n+l}]$ στο $k+1$ θέλουμε τουλάχ. $(n+l) \geq (k+1)^2$

αρκεί $k^2+l \geq (k+1)^2 \iff l \geq 2k+1$

$$\sum_{2}^{\infty} e^{-(\log n)^2} \quad \text{συγκλίνει} \iff \text{συγκλίνει} \quad \sum_{n=2}^{\infty} 2^n e^{-(\log 2^n)^2} = \sum 2^n e^{-n^2 (\log 2)^2} \qquad (12)$$

$$= \sum e^{-n \log 2 \,(n \log 2 - 1)} \qquad (13)$$

Τώρα κριτήριο n-οστής ρίζας:

$$\sqrt[n]{e^{-n \log 2\,(n\log 2 - 1)}} = e^{-\log 2\,(n \log 2 - 1)} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (14)$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}}$: **Περίπτωση 1** Αν $\alpha \le 0$ $b \ge 0$ η σειρά είναι η

$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{|b|}(\log n)^{|\alpha|}}$. Επειδή $\frac{1}{n^{|b|}(\log n)^{|\alpha|}} \downarrow$ από το κριτήριο

συμπύκνωσης συγκλίνει $\iff$ συγκλίνει $\sum_{2}^{\infty} 2^{n} \cdot \frac{1}{(2^{n})^{|b|}(\log 2^{n})^{|\alpha|}} =$

$= \sum \frac{1}{n^{|\alpha|}(2^{|b|-1})^{n}(\log 2)^{|\alpha|}}$. Αν $|b|-1>0 \overset{b\ge 0}{\iff} \boxed{b>1}$

η σειρά φράσσεται από την γεωμετρική $\sum \left(\frac{1}{2^{|b|-1}}\right)^{n} < \infty$

Αν $\boxed{b=1}$ η σειρά γίνεται $\frac{1}{(\log 2)^{|\alpha|}}\sum \frac{1}{n^{|\alpha|}}$ άρα συγκλίνει

$\iff |\alpha|>1 \overset{\alpha\le 0}{\iff} \boxed{\alpha<-1}$

Αν $|b|-1<0 \overset{b\ge 0}{\iff} 0\le b<1$ $\frac{1}{n^{|\alpha|}\,2^{n(|b|-1)}} \not\to 0$

άρα η σειρά αποκλίνει $\forall \alpha \le 0$.

Περίπτωση 2 $\alpha \le 0$ $b<0$ η σειρά γράφεται $\sum \frac{n^{|b|}}{(\log n)^{|\alpha|}}$

$\frac{n^{|b|}}{(\log n)^{|\alpha|}} \longrightarrow +\infty \neq 0$ άρα η σειρά αποκλίνει

Περίπτωση 3 $\alpha>0$ $b>0$. Η ακολουθία $\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}}$ είναι

τελικά φθίνουσα (η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{b}}$ έχει τελικά

αρνητική παράγωγο)

Άρα η σειρά συγκλίνει αν-ν συγκλίνει $\sum 2^{n}\frac{(\log 2^{n})^{\alpha}}{2^{nb}} =$

$= \sum \frac{n^{\alpha}(\log 2)^{\alpha}}{(2^{b-1})^{n}}$. Το κριτήριο n-οστής ρίζας δίνει

σύγκλιση αν $b>1$, απόκλιση αν $b<1$ Κ αν $b=1$

Η σειρά είναι $\sum n^{\alpha}(\log 2)^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ αποκλίνει

Περίπτωση 4 $\alpha>0$ $b\le 0$ η $\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}} = (\log n)^{|\alpha|} n^{|b|} \not\to 0$