Μάθημα 9ο

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$. Λύση Α (Θυμόμαστε τους τύπους $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (1)

& $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\_\_\_\_} = \sum_{n=1}^{\infty} \qquad = +\infty$$ (2)

Λύση Β (δεν θυμόμαστε τον τύπο $1^2+2^2+\cdots+n^2$) (3)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \frac{1}{2}\sum \qquad \geq \qquad = +\infty$$ (4)

Λύση Γ (δεν θυμόμαστε κανένα τύπο) (5)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\frac{n}{2}]+([\frac{n}{2}]+1)+\cdots+n}{n \cdot n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{2}]+\cdots+[\frac{n}{2}]}^{n-[\frac{n}{2}]+1 \text{ όροι}}}{n^3}$$ (6)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}$$ (7)

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\right)\frac{n}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n}{4}\frac{n}{2} = \frac{1}{8}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$ (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}$$ (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}$$ (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, n^{1/n}} \geq$$ (11)

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της $n^{1/n}$; $(=\sqrt[3]{3})$ (12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \qquad < \infty$$ (1)

<u>Πόσο κάνει ακριβώς;</u> $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Leftrightarrow$ (2)

$\Leftrightarrow \quad 1 = (n+2)A + nB = n(\qquad) + 2A$ (3)

$\Rightarrow \quad A = 1/2 \qquad B =$

Άρα $\sum \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$ (4)

$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{\quad}\right) + \left(\qquad - \frac{1}{n}\right) \right)$ (5)

$= -\frac{1}{2} \left(\lim \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} + \lim \frac{1}{n} - 1 \right) =$ (6)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} \le \sum \qquad < \infty$$ (7)

<u>Ακριβής υπολογισμός:</u> $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ (8)

$3n+2 = (n+1)(n+2)A + n(n+2)B + n(n+1)C$ (9)

$= (\qquad)A + (\qquad)B + (\qquad)C$ (10)

$= (\qquad)n^2 + (\qquad)n + (\qquad)$ (11)

(12)

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad A = 1, \; B = 1, \; C = -2$ (13)

$\sum \frac{3n^2+2}{n(n+1)(n+2)} = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right) =$ (14)

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \right) = \dots$ (15)

(σελ3)

(τηλεσκοπική) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \log \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left((n-1)\log(n+1) - n\log n\right)$ (1)

$\displaystyle = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log n}{n-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{2-1}$ (2)

$=$ (3)

(τηλεσκοπική) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{n}} \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n}} - 1 \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n}} - \frac{1}{n^{n}} \right)$ (4)

$\displaystyle = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{n^{n}} \right) = \lim \frac{1}{n^{n}} - \frac{1}{2^{2}} =$ (5)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5+(-1)^{n}} \right)^{n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\quad \right)^{n} = \sum (\quad)^{n} < \infty$ (6)

≥ 0 άρα η $S_N = \sum_{0}^{N}$ είναι αύξουσα. Από το προηγούμενο (7)

είναι και άνω φραγμένη άρα συγκλίνει (8)

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}}_{\geq 0} \leq \sum_{1}^{\infty} \text{———}$ (9) (10)

Με οριακή σύγκριση: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+5)\sqrt{n^4+n}}{3n^5+1}$ (11)

$= \qquad = \qquad = \frac{2}{3} > 0$ (12)

άρα η σειρά συγκλίνει αφού $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (13)

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$ (14)

(σελ 4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}} \quad : \quad a_n = \frac{n!}{2^{2n}}, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \qquad \right| = \qquad (1)$$

$$= \qquad = \qquad = \qquad \to \qquad (2)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n} \quad : \quad \sqrt[n]{\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}\right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \qquad (3)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}}{e^n} \quad : \quad \sqrt[n]{\left| \qquad \right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{e} = \qquad \longrightarrow \frac{e^{1/2}}{e} \qquad (4)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \quad : \quad \sqrt[n]{\left|\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right|} = \sqrt[n]{n} - 1 \longrightarrow \qquad < 1 \qquad (5)$$

(Β-τροπος)

Αλλιώς: $\sqrt[n]{n} - 1 \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$ (6)

αρα $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$ (7)

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\sqrt{n}}$; Αν παμε με n-οστη ριζα θα οδηγηθουμε (8)

στο οριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$; (9)

Ομως με το Β-τροπο όπως πριν $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$ (10)

Αρα $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \leq \qquad < \infty$ (11)

$\displaystyle\sum_{2}^{\infty} e^{-(\log n)^2}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ συγκλίνει $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \qquad =$ (12)

$= \sum$ Τωρα κριτηριο n-οστης ριζας: (13)

$$\sqrt[n]{\qquad} = \qquad \longrightarrow 0 \qquad (14)$$

(σελ 5

Περίπτωση 1

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}}$: Αν $\alpha \leq 0$ $b \geq 0$ η σειρά είναι η (1)

$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{|b|} (\log n)^{|\alpha|}}$. Επειδή $\frac{1}{n^{|b|}(\log n)^{|\alpha|}} \downarrow$ από το κριτήριο (2)

συμπύκνωσης συγκλίνει $\iff$ συγκλίνει $\sum_{2}^{\infty}$ = (3)

$= \sum \frac{1}{n \quad 2}$. Αν $|b|-1>0 \overset{b\geq 0}{\iff} \boxed{b>1}$ (4)

η σειρά φράσσεται από την γεωμετρική $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \infty$ (5)

Αν $\boxed{b=1}$ η σειρά γίνεται $\sum \frac{1}{n^{|\alpha|}}$ άρα συγκλίνει (6)

$\iff |\alpha|>1 \overset{\alpha\leq 0}{\iff} \boxed{\alpha<-1}$

Αν $|b|-1<0 \overset{b\geq 0}{\iff} 0\leq b<1$ $\frac{1}{n^{|\alpha|} \quad 2^{n(|b|-1)}} \not\to$ (7)

άρα η σειρά ________ $\forall \alpha \leq 0$.

Περίπτωση 2

$\alpha \leq 0$ $b<0$ η σειρά γράφεται $\sum \frac{n^{|b|}}{(\log n)^{|\alpha|}}$ (8)

$\frac{n^{|b|}}{(\log n)^{|\alpha|}} \longrightarrow \quad \neq 0$ άρα η σειρά ______ (9)

Περίπτωση 3

$\alpha>0$ $b>0$. Η ακολουθία $\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}}$ είναι (10)

τελικά φθίνουσα (η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{b}}$ έχει τελικά (11)

αρνητική παράγωγο)

Άρα η σειρά συγκλίνει αν-ν συγκλίνει $\sum 2^{n} \frac{(\log 2^{n})^{\alpha}}{2^{nb}}$ = (12)

$= \sum \frac{n^{\alpha}(\log 2)^{\alpha}}{(2^{b-1})^{n}}$. Το κριτήριο ν-οστής ρίζας δίνει (13)

σύγκλιση αν $b>1$, απόκλιση αν $b<1$ κ αν $b=1$ (14)

Η σειρά είναι $\sum n^{\alpha}(\log 2)^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ αποκλίνει (15)

Περίπτωση 4

$\alpha>0$ $b\leq 0$ η $\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{b}} = (\log n)^{|\alpha|} n^{|b|} \not\to 0$ (16)