

Μάθημα 11

Ορισμός Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση (1)

Lipschitz με σταθερά M αν $\forall x, y \in A$ ισχύει (2)

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad (3)$$

Παράδειγμα τριτοίων συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις με (4)

γραμμική παράγωγο εξαρτάται του θ . Με τον τύπο: (5)

Αν $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $|f'(\xi)| \leq M \forall \xi \in (a, b)$ (6)

τότε η f είναι Lipschitz με σταθερά M , δίνει αν (7)

$x, y \in (a, b)$ υπάρχει ξ ανάμεσα σε x, y ώστε (8)

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Rightarrow |f'(\xi)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \Rightarrow \quad (9)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M |x - y| \quad (10)$$

Πρόταση Οι συναρτήσεις Lipschitz είναι οφ. συνεχείς (11)

Απόδειξη $\forall \epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$ οπότε (12)

$$\text{αν } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M |x - y| < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \quad (13)$$

(ή $|x - x_0| < \delta$)

Ορισμός (εναλλακτική οφ. συνεχούς) Η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι (14)

οφ. συνεχής αν $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε για κάθε (15)

$$x, y \in A \text{ με } |x - y| < \delta \text{ ισχύει } |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (16)$$

Παράδειγμα Η $f(x) = \frac{1}{x} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι οφ. συνεχής (17)

$$\text{δίνει αν } x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{1}{n^2} \quad |x_n - y_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right| \rightarrow 0 \quad (18)$$

$$\text{αλλά } \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = |n - n^2| \rightarrow +\infty \quad (19)$$

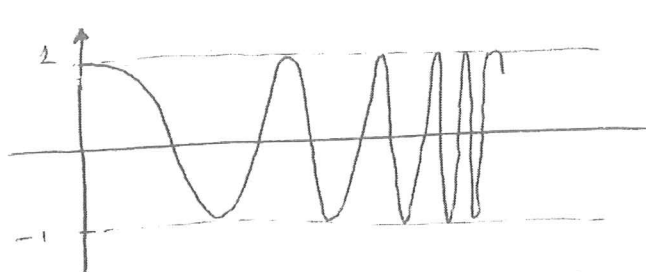
Η οφ. συνέχεια δεν έχει να κάνει με το αν η f είναι γραμμική (1)
 αλλά με το πόσο "αβρότες" μεταβάλλει. Πχ η $f(x) = \cos(x^2)$
 είναι συνεχής και γραμμική αλλά όχι οφ. ~~γραμμική~~ ^{συνεχής} διασπ. (3)

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad y_n = \sqrt{n\pi} \quad \text{τότε } |x_n - y_n| = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \quad (4)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \rightarrow 0 \quad \text{αλλά } |\cos(\sqrt{(n+1)\pi}^2) - \cos(\sqrt{n\pi}^2)| \quad (5)$$

$$= |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2 \neq 0$$

$$|(-1)^n(-1-1)| \neq 0$$



$\cos(x^2)$ (7)

```
https://sagecell.sagemath.org
plot(cos(x^2), (x, 0, 10))
```

Θεώρημα Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε f ομοιόμορφα συνεχής (8)

Απόδειξη Έστω ότι η f ΔΕΝ είναι οφ. συνεχής τότε $\exists \epsilon > 0$ (9)
 και δύο ακολουθίες $x_n, y_n \in [a, b]$ με $x_n - y_n \rightarrow 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ (10)

Η x_n είναι γραμμική ($a \leq x_n \leq b$) οπότε από το θ , Bolzano-Weierstrass

υπάρχει υποακολουθία της x_n που (12)

συγκλίνει στο $[a, b]$ Έστω η x_{k_n} με όριο το $x \in [a, b]$. Αλλά τότε (13)

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \rightarrow x - 0 = x \quad (14)$$

Από τη συνέχεια της f στο $x \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$ (15)

και $f(y_{k_n}) \rightarrow f(x)$ (16)

Αρα $\epsilon \leq |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \rightarrow |f(x) - f(x)| = 0$ (17)

απόδειξη \square

Θεώρημα Οι οποιοδήποτε συνεχώς συναγόμενες μεταφέρων ακολουθίες (1)

Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. (2)

($\forall \frac{1}{x} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα: η $\frac{1}{n}$ είναι (3)

Cauchy (γιατί στο \mathbb{R} συγκλίνει) αλλά η $\frac{1}{2/n} = n$ (4)

δεν είναι Cauchy) (5)

(Το αντίστροφο δεν είναι αληθές: Αν η f μεταφέρει ακολουθίες (6)

Cauchy σε ακολουθίες Cauchy $\nRightarrow f$ οπ. συνεχής: π.χ. (7)

Αν x_n ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R} \Rightarrow x_n^2$ είναι Cauchy (8)

(άσκησις) αλλά η $f(x) = x^2$ δεν είναι οπ. συνεχής) (9)

Απόδειξη Έστω οτι $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οπ. συνεχής και x_n ακολουθία (10)

Cauchy στο A . Πρέπει να δείξουμε οτι $f(x_n)$ Cauchy. Αν $\epsilon > 0$ (11)

πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_0$ να $|x_n - x_m| < \delta$. (12)

Οπως $\exists \delta > 0$ ώστε αν $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. (13)

$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ αφού f οπ. συνεχής. Η x_n είναι (14)

Cauchy $\forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \delta$ (15)

οποτε για $n, m \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ □ (16)

f οποιοδήποτε συνεχής \Rightarrow (μεταφέρει ακολουθίες Cauchy σε //)

Απλ Αν $\exists x_n$ Cauchy ώστε $f(x_n)$ οχι Cauchy $\Rightarrow f$ οχι οπ. συνεχής (17)

Θεωρημα Αν $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, η f είναι οφ. συνεχής (1)
 \Leftrightarrow υπάρχει $\sigma \in \mathbb{R}$ τέτοιο $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ & $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ (2)

Απόδειξη \Leftarrow Φανταστείτε $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & x = a \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & x = b \end{cases}$ (3)
 (4)
 (5)

Είναι συνεχής στο $[a,b]$ ως \tilde{f} οφ. συνεχής στο $[a,b]$ (6)

Σ (a,b) , $\alpha \tilde{f}|_{(a,b)} = f$ (7)

(\Downarrow) Διότι $\forall x, y \in (a,b)$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow x, y \in [a,b]$ οπότε (8)

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (9)$$

\Rightarrow Αν $x_n \rightarrow a^+$ $\Rightarrow x_n$ Cauchy $\xrightarrow[\sigma.w.]{f \circ \pi} f(x_n)$ Cauchy (10)

$\Rightarrow \exists l: \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ (11)

Αν $y_n \rightarrow a^+$ για αλληλ. ακολουθία $\Rightarrow x_n - y_n \rightarrow 0$ (12)

$$\xrightarrow[\sigma.w.]{f \circ \pi} f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0 \Rightarrow f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \xrightarrow{\sigma.w.} l \quad (14)$$

Αν $\forall x_n \rightarrow a^+ f(x_n) \rightarrow l$ (15)

συνεπώς το $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ υπάρχει (= l) (16)

Ομοίως για το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ (17)

Παράδειγμα Η $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$ είναι συνεχής ως οφ. συνεχής. (18)

Δεν είναι Lipschitz Διότι $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y| \quad \forall x, y \in [0,1]$ (19)

\Rightarrow το ίδιο ισχύει $\forall x, y \in (0,1) \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x-y} \right| \leq M \quad \forall x, y \in (0,1)$ (20)

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{z+h} - \sqrt{z}}{h} \right| \leq M \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{\sqrt{z+h} - \sqrt{z}}{h} \right| \leq M \quad (21)$$

$\Rightarrow (\sqrt{z})' \leq M \quad \forall z \in (0,1)$ το οποίο είναι αόριστο (22)

που δεν είναι γράφημα στο $(0,1)$ (23)

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

H $f(x) = \sqrt{x}$ εως $[1, \infty)$ είναι Lipschitz στον $(f'(x))$ (1)

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$ $A_f \ll \epsilon_{[1, \infty)}$ (2)

$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ (3)

H $f(x) = \sqrt{x}$ είναι οφ. συνεχής εως $[0, \infty)$ (4)

Απόδειξη

Εστω $\epsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ ώστε αν $x, y \in [0, 1]$ $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow$ (5)

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon/2$

(1) (6)

$\exists \delta_2 > 0$ ώστε αν $x, y \in [1, \infty)$ $|x - y| < \delta_2$ (7)

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon/2$

(2) (8)

Οπότε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. (9)

Αν $x, y \in [0, \infty)$ $|x - y| < \delta$ τότε (10)

• είτε $x, y \geq 1$ $|x - y| < \delta \leq \delta_2 \xrightarrow{(2)} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon/2 < \epsilon$ (11)

• είτε $x, y \leq 1$ $|x - y| < \delta \leq \delta_1 \xrightarrow{(1)} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon/2 < \epsilon$ (12)

• είτε $x \leq 1 \leq y$ οπότε $|x - 1| < \delta \Rightarrow |1 - y| < \delta$ (13)

οπότε $|\sqrt{x} - \sqrt{1}| < \epsilon/2$ \wedge $|\sqrt{1} - \sqrt{y}| < \epsilon/2$ οπότε (14)

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{1}| + |\sqrt{1} - \sqrt{y}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ \square (15)

||
 $|(x - 1) - (y - 1)|$