Μάθημα 12

Συστολές & το θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συστολή αν είναι Lipschitz με σταθερά $0<M<1$, δηλαδή αν

$\forall x, y \in A$ ισχύει $|f(x)-f(y)| \leq M \cdot |x-y|$ όπου $M<1$

Θεώρημα Αν $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συστολή τότε υπάρχει μοναδικό σημείο z ώστε $f(z)=z$. (το οποίο ονομάζεται σταθερό σημείο)

Απόδειξη Αν υπάρχει τότε είναι μοναδικό διότι αν $z_1 \neq z_2$ δύο τέτοια σημεία τότε $|z_1-z_2| = |f(z_1)-f(z_2)| \leq M \cdot |z_1-z_2| < |z_1-z_2|$ άτοπο. Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη.

Θεωρούμε τυχόν $x_1 \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε $x_{n+1}=f(x_n)$ (δηλαδή $x_2=f(x_1)$ $x_3=f(x_2)$ κλπ). Η ακολουθία x_n είναι Cauchy διότι

$$|x_{k+1}-x_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq M \underbrace{|x_k-x_{k-1}|}_{\leq M|x_{k-1}-x_{k-2}|} \leq M^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \leq \cdots$$

$$\leq M^{k-1}|x_2-\underbrace{x_1}_{\overset{\|}{k-(k-1)}}|$$

Άρα αν $n>m$ τότε $|x_n-x_m| = |(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{m+1}-x_m)|$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1} M^{k-1}|x_2-x_1| = |x_2-x_1| \cdot \frac{M^{m-1}-M^{n-1}}{1-M}$$

$$= |x_2-x_1| \frac{1-\overset{<1}{M^{n-m}}}{1-M} M^{m-1} \leq \frac{|x_2-x_1|}{(1-M)M} M^m$$

$M^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ αφού $0<M<1$ άρα $\exists\, n_0$ ώστε $m \geq n_0$ $|M^m| < \dfrac{\varepsilon}{\frac{|x_2-x_1|}{(1-M)M}}$

(αν $x_2=x_1$ έχουμε ήδη τελειώσει γιατί $x_1=x_2=f(x_1) \Rightarrow x_1=f(x_1)$)

Οπότε αν $n>m\geq n_0$ τότε $|x_n-x_m| \leq \frac{|x_2-x_1|}{(1-M)M} M^m <$
$< \varepsilon$. Έτσι η x_n ως Cauchy συγκλίνει έστω στο $z\in\mathbb{R}$.

Από τη συνέχεια της f (ως Lipschitz) παίρνοντας όρια στην $x_{n+1}=f(x_n)$ προκύπτει $z=f(z)$ ∎

<u>Ασκήσεις</u> ① Αν $0<p<1$ ελέγξτε αν η $f(x)=x^p$ στο $[0\ 1]$ είναι συνάρτηση Lipschitz ή αν είναι ομ. συνεχής.

<u>Λύση</u> Για να είναι Lipschitz πρέπει να υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y| \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq M \quad \forall\, x\neq y \text{ στο } [0\ 1]$$

$\overset{y\to x}{\Longrightarrow} |f'(x)|\leq M$. Αλλά $f'(x)=px^{p-1}=\frac{p}{x^{1-p}}$ η οποία δεν είναι φραγμένη στο $[0\ 1]$.

Άρα η x^p δεν είναι Lipschitz στο $[0\ 1]$ για $0<p<1$.
Όμως είναι ομ. συνεχής ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα.

② Δείξτε ότι αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχείς τότε $f+g$ ομ. συνεχείς, αλλά η $f\cdot g$ όχι απαραίτητα ομ. συνεχής.

<u>Λύση</u> Αν $x_n-y_n\to 0 \Rightarrow f(x_n)-f(y_n)\to 0$
και $g(x_n)-g(y_n)\to 0$

$\Rightarrow f(x_n)-f(y_n)+g(x_n)-g(y_n)\to 0 \Rightarrow$
$(f+g)(x_n)-(f+g)(y_n)\to 0 \Rightarrow f+g$ ομ. συνεχής

Οι $f(x)=x$ και $g(x)=x$ είναι ομ. συνεχείς αλλά η $(fg)(x)=x^2$ δεν είναι.

(3) Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ (1)

τότε f ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$ (2)

Λύση Έστω $\varepsilon>0$ $\exists\, M_1>0$ ώστε αν $x>M_1$ $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (3)

(αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$) (4)

κ $\exists\, M_2>0$ · ώστε αν $x<-M_2 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon/2$ (5)

(αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$). Άρα αν $M=\max\{\{M_1,M_2\},1\}$ (6)

και $|x|>M \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon/2$ (7)

Στο διάστημα $[-2M,2M]$ η f ως συνεχής είναι ομ. συνεχής (8)

άρα $\exists\, \delta_1>0$ ώστε αν $x,y\in[-2M,2M]$ με $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (9)

Θέτουμε $\delta=\min\{\frac{1}{2},\delta_1\}>0$ και θεωρούμε $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε $|x-y|<\delta$ (10)

Αν $x,y\in[-M,M] \Rightarrow x,y\in[-2M,2M]$, $|x-y|<\delta\leq\delta_1 \Rightarrow$ (11)

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ σύμφωνα με την γραμμή (9) (12)

Αν $x,y\notin[-M,M]$ τότε $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ (13)

από την γραμμή (7)

Τέλος, αν $x\in[-M,M]$ κ $y\notin[-M\ M]$ τότε (14)

$|y|\leq|y-x|+|x|\leq\delta+M\leq\frac{1}{2}+M\leq M+M=2M$ (15)

άρα $x,y\in[-2M\ 2M]$ κ η $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (16)

πάλι από τη γραμμή (9) (17)

(4) Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής τότε υπάρχουν (1)

$a, b>0$ ώστε $|f(x)| \le a|x|+b \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Λύση Αφού f ομ. συνεχής για $\varepsilon=1$ $\exists\ \delta_1>0$ ώστε (3)

αν $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1$. Θέτοντας $\delta=\delta_1/2$ (4)

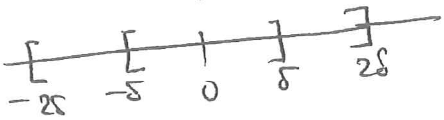
αν $|x-y|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le 1$ (5)

Έτσι αν $x\in[-\delta\ \delta] \Rightarrow |x-0|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)|\le 1 \Rightarrow$ (6)

$\Rightarrow |f(x)|-|f(0)| \le \big||f(x)|-|f(0)|\big| \le |f(x)-f(0)| \le 1 \Rightarrow |f(x)| \le 1+|f(0)|$ (7)

Αν $x\in[-2\delta, 2\delta]\setminus[-\delta\ \delta]$ τότε $|x-\delta|\le\delta$ αν $x\in[\delta\ 2\delta]$ (8)

κ $|x-(-\delta)|\le\delta$ αν $x\in[-2\delta\ \delta]$ (9)



από σχέση (7)

Άρα $|f(x)| \le |f(x)-\underset{\text{ή}(-\delta)}{f(\delta)}| + |\underset{\text{ή}(-\delta)}{f(\delta)}| \le 1 + (1+|f(0)|)$ (10)

(11)

διότι $\underset{(-\delta)}{|x-\delta|}\le\delta$ (12)

$\le 2+|f(0)|$. και αν $x\in(-\delta\ \delta) \Rightarrow |f(x)|\le 1+|f(0)|\le 2+|f(0)|$ (13)

Ομοίως αν $x\in[-3\delta, 3\delta]\setminus(-2\delta, 2\delta)$ $|f(x)|\le|f(x)-f(2\delta)|+|f(2\delta)|$ (14)

$\le 1 + (2+|f(0)|) = 3+|f(0)|$ κ αν $x\in(-2\delta\ 2\delta)$ $|f(x)|\le 2+|f(0)| \le 3+|f(0)|$ (15)

και γενικά $\forall\ x\in[-k\delta, k\delta]$ ισχύει (16)

$|f(x)| \le k+|f(0)|$. (17)

Έστω τώρα $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε k τον ελάχιστο φυσικό ώστε $\frac{|x|}{\delta}\le k$ (18)

(δηλ $k=\left[\frac{|x|}{\delta}\right]$ αν $\frac{|x|}{\delta}\in\mathbb{N}$, $k=\left[\frac{|x|}{\delta}\right]+1$ αν $\frac{|x|}{\delta}\notin\mathbb{N}$) (19)

Τότε $k-1\le\frac{|x|}{\delta}$. και επειδή $|x|\le k\delta$ θα ισχύει (20)

$|f(x)| \le k+|f(0)| \le \frac{|x|}{\delta}+1+|f(0)| = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{a}|x| + \underbrace{(1+|f(0)|)}_{b}$ (21)

$\square$

Εξετάστε την ομ. συνέχεια για τις $\frac{1}{x}:[2,\infty)\to\mathbb{R}$

$\frac{\sin^2 x}{x}:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $\sin\frac{1}{x}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\frac{\sin x}{x}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

Λύση: Η $\frac{1}{x}$ σε αυτό το π.ο. είναι Lipschitz γιατί $\left|\left(\frac{1}{x}\right)'\right|=\left|-\frac{1}{x^2}\right| \le \frac{1}{4}$. Άρα από το θ. μέσης τιμής $\forall x,y\in[2,\infty)$ $\exists\ \xi$ ανάμεσα στα x,y ώστε $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=|f'(\xi)|\le\frac{1}{4} \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\frac{1}{4}|x-y|$

Άρα είναι ομ. συνεχής

Ομοίως η $\frac{\sin^2 x}{x}$ έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0,\pi]$ άρα είναι Lipschitz: $\left|\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)'\right| = \left|\frac{2x\sin x\cos x-\sin^2 x}{x^2}\right| \le \left|\frac{2\sin x\cos x}{x}\right|+\left|\frac{\sin^2 x}{x^2}\right|$

$\le 2\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \le 3$ (διότι $|\sin x|\le|x|$ και $\lim_{x\to0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$)

Άρα είναι ομ. συνεχής

Δεν είναι ομ. συνεχής η $\sin\frac{1}{x}$: Θέτω $x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ $y_n=\frac{1}{2\pi n}$

$|x_n-y_n| = \left|\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2\pi n}\right| \to 0$ αλλά

$|\sin x_n - \sin y_n| = \left|\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\pi n)\right| = 1-0 = 1 \not\to 0$

$\frac{\sin x}{x}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής γιατί η

$\tilde f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}\tilde f(x)=0$

Άρα $\tilde f$ ομ. συνεχής στο $[0,\infty)$, άρα $f=\tilde f|_{(0,\infty)}$ ομ. συνεχής

(Ⓐ δείξτε ότι αν $f:A\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής και $B\subseteq A \Rightarrow f|_B$ ομ. συνεχής

Ⓑ Αν $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \Rightarrow f$ ομ. συνεχής)