Μάθημα 12

Συστολές & το θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός Μια συναρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ λεγεται συστολή αν είναι Lipschitz με σταθερα $0<M<1$, δηλαδη αν

Θεώρημα Αν $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συστολή τότε υπάρχει μοναδικό σημείο z ωστε $f(z)=z$. (το οποίο ονομαζεται σταθερό σημείο)

Απόδειξη Αν υπάρχει τότε είναι μοναδικό διότι αν $z_1 \neq z_2$ δύο τετοια σημεια τότε $|z_1-z_2| = | \qquad | \le M \cdot | \qquad | < | \qquad |$ άτοπο. Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη.

Θεωρουμε τυχον $x_1 \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε $x_{n+1} = f(x_n)$ (δηλαδή $x_2 = \qquad x_3 = \qquad$ κλπ). Η ακολουθία x_n είναι Cauchy διότι

$$|x_{k+1}-x_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})| \le M\,|x_k-x_{k-1}| \le M^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \le \dots$$
$$\le M \quad \underbrace{|x_2-x_1|}_{\shortparallel \; k-(k-1)}$$

Αρα αν $n>m$ τότε $|x_n-x_m| = |(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\dots+(x_{m+1}-x_m)|$

$$\le \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1}-x_k| \le \sum_{k=m}^{n-1} \qquad = |x_2-x_1| \cdot \frac{M^{m-1}-M^{n-1}}{1-M}$$

$$= |x_2-x_1| \frac{1-M^{n-m}}{1-M} M^{m-1} \le \frac{|x_2-x_1|}{(1-M)M} M^m$$

$M^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ αφου $0<M<1$ αρα $\exists\, n_0$ ωστε $m \geq n_0$ $|M^m| < \dfrac{\varepsilon}{\frac{|x_2-x_1|}{(1-M)M}}$

(αν $x_2 = x_1$ έχουμε ήδη τελειώσει γιατί $x_1 = x_2 = f(x_1) \Rightarrow x_1 = f(x_1)$)

Οπότε αν $n > m \geq n_0$ τότε $|x_n - x_m| \leq \frac{|x_2 - x_1|}{(1-M)M} M^m <$

$< \varepsilon$. Έτσι η x_n ως συγκλίνει έστω στο $z \in \mathbb{R}$.

Από τη συνέχεια της f (ως Lipschitz) παίρνοντας όρια στην $x_{n+1} = f(x_n)$ προκύπτει $z = f(z)$ ∎

Ασκήσεις ① Αν $0 < p < 1$ ελέγξτε αν η $f(x) = x^p$ στο $[0,1]$ είναι συνάρτηση Lipschitz και αν είναι ομ. συνεχής.

Λύση Για να είναι Lipschitz πρέπει να υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M \quad \forall\, x \neq y \text{ στο } [0,1]$$

$\xRightarrow{y \to x} |f'(x)| \leq M$. Αλλά $f'(x) = p x^{p-1} = \frac{p}{x^{1-p}}$ η οποία δεν είναι φραγμένη στο $[0,1]$.

Άρα η x^p δεν είναι Lipschitz στο $[0,1]$ για $0 < p < 1$.

Όμως είναι ομ. συνεχής ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα.

② Δείξτε ότι αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχείς τότε $f+g$ ομ. συνεχείς, αλλά η $f \cdot g$ όχι απαραίτητα ομ. συνεχής.

Λύση Αν $x_n - y_n \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$

και $g(x_n) - g(y_n) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow f(x_n) - f(y_n) + g(x_n) - g(y_n) \longrightarrow 0 \Longrightarrow$

$(f+g) \longrightarrow 0 \Rightarrow f+g$ ομ. συνεχής

Οι $f(x) = x$ και $g(x) = x$ είναι ομ. συνεχείς αλλά η $(fg)(x) = x^2$ δεν είναι.

(3) Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ (1)

τότε f ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$ (2)

<u>Λύση</u> Έστω $\varepsilon>0$ $\exists\ M_1>0$ ώστε αν $x>M_1$ $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (3)

(αφού) (4)

και $\exists\ M_2>0$ ώστε αν $x<-M_2 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon/2$ (5)

(αφού). Άρα αν $M=\max\{\{M_1,M_2\},1\}$ (6)

και $|x|>M \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon/2$ (7)

Στο διάστημα $[-2M,2M]$ η f ως συνεχής είναι ______ (8)

άρα $\exists\ \delta_1>0$ ώστε αν $x,y\in[-2M,2M)$ με $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (9)

Θέτουμε $\delta=\min\{\frac{1}{2},\delta_1\}>0$ και θεωρούμε $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε $|x-y|<\delta$ (10)

Αν $x,y\in[-M,M] \Rightarrow x,y\in[-2M,2M]$, $|x-y|<\delta\le\delta_1 \Rightarrow$ (11)

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ εφαρμόζοντας την γραμμή ___ (12)

Αν $x,y\notin[-M,M]$ τότε $|f(x)-f(y)|\le|f(x)|+|f(y)|< \qquad =\varepsilon$ (13)

από την γραμμή ___

Τέλος, αν $x\in[-M,M]$ και $y\notin[-M\ \ M]$ τότε (14)

$|y|=|y-x|+|x|\le\delta+M\le\frac{1}{2}+M\le M+M=2M$ (15)

άρα $x,y\in[-2M\ \ 2M]$ και η $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (16)

πάλι από τη γραμμή ___ (17)

(4) Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής τότε υπάρχουν $a,b>0$ ώστε $|f(x)|\le a|x|+b \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Λύση. Αφού f ομ. συνεχής για $\varepsilon=1$ $\exists\ \delta_1>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1$. Θέτοντας $\delta=\delta_1/2$

αν $|x-y|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le 1$

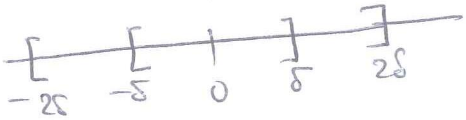
Έτσι αν $x\in[-\delta\ \delta] \Rightarrow |x-0|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)|\le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|\le 1+|f(0)|$

$\Rightarrow$

Αν $x\in[-2\delta,2\delta]\setminus[-\delta\ \delta]$ τότε $|x-\delta|\le\delta$ αν $x\in[\delta\ \ 2\delta]$

κι $|x-(-\delta)|\le\delta$ αν $x\in[-2\delta\ \ \delta]$



από γραμμή $\boxed{}$

Άρα $|f(x)| = |f(x)-\underset{\text{ή } (-\delta)}{f(\delta)}| + |\underset{\text{ή } (-\delta)}{f(\delta)}| \le 1 + (1+|f(0)|)$

διότι $|x-\underset{(-\delta)}{\delta}|\le\delta$

$\le 2+|f(0)|$. και αν $x\in(-\delta\ \delta) \Rightarrow |f(x)|\le 1+|f(0)|\le 2+|f(0)|$

Ομοίως αν $x\in[-3\delta,3\delta]\setminus(-2\delta,2\delta)$ $\quad |f(x)|\le|f(x)-f(2\delta)|+|f(2\delta)|$

$\le 1 + (2+|f(0)|) = 3+|f(0)|$ κι αν $x\in(-2\delta\ \ 2\delta)$ $|f(x)|\le 2+|f(0)|$
$\le 3+|f(0)|$

και γενικά $\forall\ x\in[-k\delta,\ k\delta]$ ισχύει

$$|f(x)|\le k+|f(0)|.$$

Έστω τώρα $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε k τον ελάχιστο φυσικό ώστε $\frac{|x|}{\delta}\le k$

(δηλ. $k=\left[\frac{|x|}{\delta}\right]$ αν $\frac{|x|}{\delta}\in\mathbb{N}$, $k=\left[\frac{|x|}{\delta}\right]+1$ αν $\frac{|x|}{\delta}\notin\mathbb{N}$)

Τότε $k-1\le\frac{|x|}{\delta}$. και επειδή $|x|\le k\delta$ θα ισχύει

$$|f(x)|\le k+|f(0)| \le \frac{|x|}{\delta}+1+|f(0)| = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{a}|x| + \underbrace{(1+|f(0)|)}_{b}$$

∎

ΓΕΛΣ

Εξετάστε την ομ. συνέχεια των $\frac{1}{x} : [2\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\frac{\sin^2 x}{x} : (0\ \ \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sin\frac{1}{x} : (0\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\sin x}{x} : (0\ \infty) \to \mathbb{R}$

Λύση: Η $\frac{1}{x}$ σε αυτό το π.ο. είναι Lipschitz γιατί $\left|\left(\frac{1}{x}\right)'\right| = \left|-\frac{1}{x^2}\right|$ $\leq \frac{1}{4}$. Άρα από το θ. μέσης τιμής $\forall x, y \in [2\infty)$ $\exists\ \xi$ ανάμεσα σε x, y ώστε $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(\xi)| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$

Άρα είναι ομ. συνεχής

Ομοίως η $\frac{\sin^2 x}{x}$ έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0\ \pi]$ άρα είναι Lipschitz: $\left|\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)'\right| = \left|\qquad\qquad\right| \leq \left|\qquad\right| + \left|\qquad\right|$

$\leq 2\left|\frac{\sin x}{x}\right| + \left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \leq 3$ (διότι $|\sin x| \leq$ & $\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| =$)

Άρα είναι ομ. συνεχής

Δεν είναι ομ. συνεχής η $\sin\frac{1}{x}$: Θέτω $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n}$

$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi n}\right| \longrightarrow 0$ αλλά

$|\sin x_n - \sin y_n| = \left|\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\pi n)\right| = 1 - 0 = 1 \not\to 0$

$\frac{\sin x}{x} : (0\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής γιατί η

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0\ \ \infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = 0$

Άρα $\tilde{f}$ ομ. συνεχής στο $[0\infty)$, άρα $f = \tilde{f}\big|_{(0\infty)}$ ομ. συνεχής

(A) δείξτε ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής & $B \subseteq A \Rightarrow f\big|_B$ ομ. συνεχής

(B) Αν $f : [0\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ ομ. συνεχής