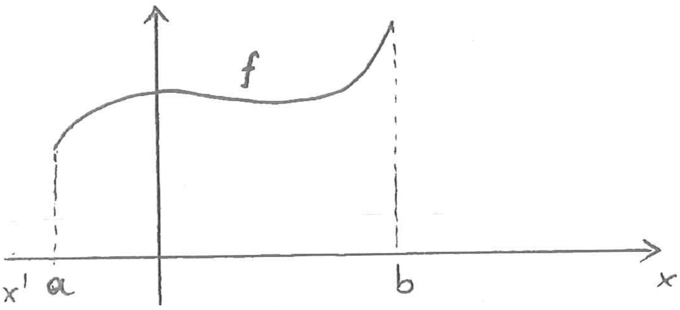
Μάθημα 13

Ολοκλήρωμα Riemann.

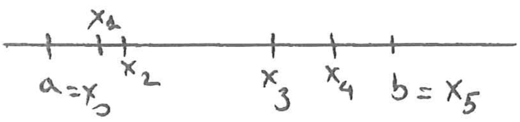
Αν $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a\,b]$ θέλουμε να βρούμε μια μέθοδο που να υπολογίζει το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα $x'x$ και τις κάθετες σε αυτόν ευθείες $x=a$ και $x=b$.



Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «ολοκλήρωμα» και το εμβαδόν που θα υπολογιστεί συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dx$

Η μέθοδος του Darboux.

Ορισμός Διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$ ονομάζουμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία σημείων $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$ ώστε $x_0=a$ και $x_n=b$. Θα γράφουμε «η διαμέριση $P=\{x_0<x_1<\dots<x_n\}$».



Μια διαμέριση με 6 σημεία

Μια διαμέριση χωρίζει σε υποδιαστήματα το $[a\,b]$ πλάτους $x_{k+1}-x_k$ για $k=0\dots n-1$ και το μεγαλύτερο πλάτος το ονομάζουμε «λεπτότητα» της P, και γράφουμε

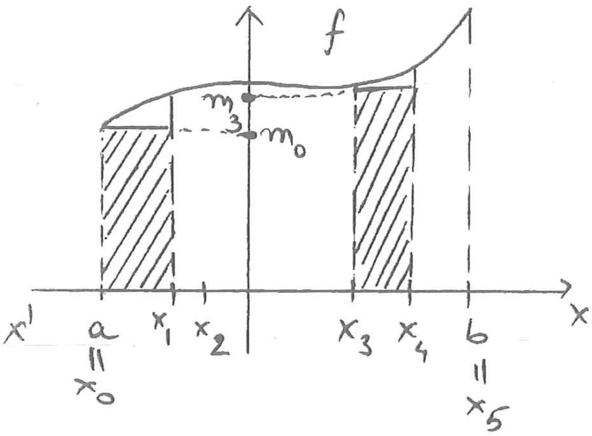
$$\|P\|=\max\{x_{k+1}-x_k : k=0,1,\dots,n-1\}$$

Στο παράδειγμα του σχήματος $\|P\| = x_3-x_2$.

Αν προσθέσουμε επιπλέον σημεία στην P σχηματίζοντας μια νέα διαμέριση P_1, η P_1 έχει μικρότερη ή ίση λεπτότητα από την P (φανταστείτε να προστεθεί ένα σημείο στο $(x_2\,x_3)$ διάστημα του σχήματος). Για αυτό η P_1 $(\supseteq P)$ ονομάζεται εκλέπτυνση της P.

Αν P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a\,b]$ τότε η $P_1 \cup P_2$ είναι εκλέπτυνση και της P_1 & της P_2, για αυτό ονομάζεται «κοινή εκλέπτυνση» των P_1, P_2

Σε κάθε διάστημα της διαμέρισης P βρίσκουμε την ελάχιστη «τιμή» της f (το inf γιατί μπορεί να μην έχει) και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο με ύψος αυτό το inf και βάση το διάστημα στο οποίο το υπολογίζουμε



$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{ f(x) \quad x_k \le x \le x_{k+1} \}$$

$k=0,\ldots,n-1.$

Άρα τα εμβαδά των παραλληλογράμμων είναι $m_k\cdot(x_{k+1}-x_k)$

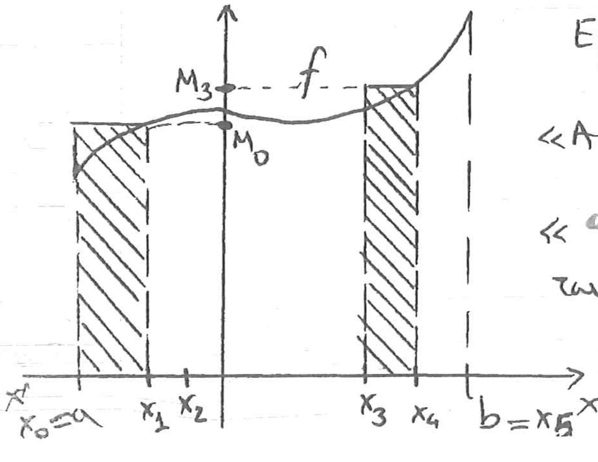
Τα προσθέτουμε και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)$$ το οποίο ονομάζουμε «κάτω άθροισμα Darboux»

Ονομάζουμε «κάτω ολοκλήρωμα της f» το supremum των $L(f\,P)$ ως προς όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[a\,b]$. Γράφουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{ L(f\,P) : P \text{ διαμέριση του } [a\,b] \}$$

Κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας αντί τα m_k τα $M_k(f,P) = M_k = \sup\{ f(x) \quad x_k \le x \le x_{k+1} \}$ $k=0,\ldots,n-1$



Εμβαδόν παραλληλογράμμου:

«Άνω άθροισμα Darboux»: $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$

«άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a\,b]$» το infimum των $U(f\,P)$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{ U(f\,P) \quad P \text{ διαμ. του } [a\,b] \}$$

(μιλάμε διαισθητικά και όχι αυστηρά)

Αν E το εμβαδόν που προσπαθούμε να υπολογίσουμε, φανερά

$$L(f,P) \le E \le U(f,Q)$$ όπου P και Q οποιεσδήποτε διαμερίσεις του $[a,b]$

οπότε $\underline{\int_a^b} f(x) \le E \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Έτσι αν $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ne \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ΔΕΝ αποδίδουμε τιμή στο E και λέμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Ενώ αν $\underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

και την κοινή αυτή τιμή την ονομάζουμε ολοκλήρωμα της f, και

γράφουμε $$E = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Λήμμα Αν P διαμέριση του $[a,b]$ και P_1 εκλέπτυνσή της

τότε $L(f,P) \le L(f,P_1)$ και $U(f,P) \ge U(f,P_1)$

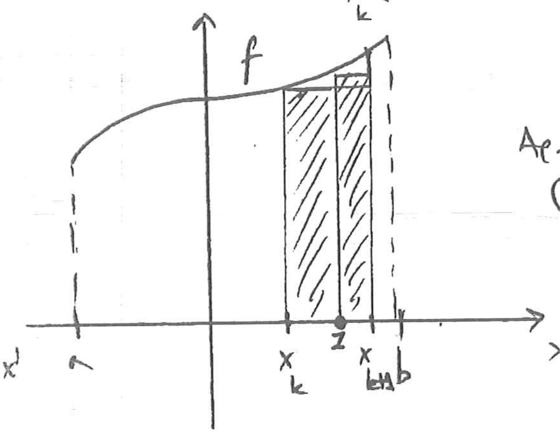
Απόδειξη Αρκεί να το αποδείξουμε όταν $P_1 = P \cup \{z\}$

(στη συνέχεια θα προσθέτουμε ένα–ένα τα υπόλοιπα σημεία της P_1)

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ~~$k \in \{0, \dots, n-1\}$~~

Αν $z \in [x_k, x_{k+1}]$ για κάποιο $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ θα έχουμε

$$L(f,P_1) - L(f,P) = \Big(\inf_{x_k \le x \le z} f(x)\Big)(z - x_k) + \Big(\inf_{z \le x \le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1} - z) - \Big(\inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1} - x_k) \quad (\ast)$$



Αλλά $x_{k+1} - x_k = (x_{k+1} - z) + (z - x_k)$

Άρα
$$(\ast) = \Big(\inf_{x_k \le x \le z} f(x) - \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)\Big)(z - x_k) + \Big(\inf_{z \le x \le x_{k+1}} f(x) - \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1} - z)$$

$$\ge 0$$

Άρα $L(f,P) \le L(f,P_1)$. Ομοίως

$$U(f,P_1) - U(f,P) = \dots = \Big(\sup_{[x_k,z]} f(x) - \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)\Big)(z - x_k) + \Big(\sup_{[z,x_{k+1}]} f(x) - \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)\Big)(x_{k+1} - z)$$

$$\le 0 \implies U(f,P_1) \le U(f,P)$$

Λήμμα Για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1 κ P_2 του $[a\,b]$ ισχύει

$$L(f\,P_1) \le U(f\,P_2) \qquad (1)$$

Απόδειξη: Η $P_1 \cup P_2$ είναι εκλέπτυνση των δύο διαμερίσεων

άρα από το προηγούμενο

$$L(f\,P_1) \le L(f\,P_1 \cup P_2) \le U(f\,P_1 \cup P_2) \le U(f\,P_2)$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει $L(f\,P) \le U(f\,P)$ που είναι προφανές από τον ορισμό τους) ■

Παίρνοντας sup στην (1) ως προς όλες τις διαμερίσεις P_1 παίρνουμε $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \le U(f\,P_2)$ $\forall P_2$ και παίρνοντας σε αυτήν inf ως προς P_2 παίρνουμε την

$$\boxed{\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int}_a^b f(x)\,dx}$$

Θεώρημα (κριτήριο Riemann) Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a\,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμέριση P_ε του $[a\,b]$ ώστε

$$(0 \le)\ U(f\,P_\varepsilon) - L(f\,P_\varepsilon) < \varepsilon \qquad (2)$$

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ και f ολοκληρώσιμη με $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx = l$ υπάρχει διαμέριση P_1 ώστε $L(f\,P_1) > l - \varepsilon/2$ και υπάρχει διαμέριση P_2 ώστε $U(f\,P_2) < l + \varepsilon/2$. Θέτουμε $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ οπότε

$$U(f\,P_\varepsilon) - L(f\,P_\varepsilon) \le U(f\,P_2) - L(f\,P_1) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

Αντίστροφα αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon$ ώστε να ισχύει η (2) τότε από τους ορισμούς, φανερά ισχύει

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx \le U(f\,P_\varepsilon) \overset{(2)}{\le} L(f\,P_\varepsilon) + \varepsilon \le \underline{\int}_a^b f(x)\,dx + \varepsilon \Rightarrow$$

$$0 \le \overline{\int}_a^b f(x)\,dx - \underline{\int}_a^b f(x)\,dx \le \varepsilon \qquad ■$$