Μάθημα 14

Θεώρημα (το κριτήριο του Riemann) Έστω ότι η $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση.

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη $\iff$ υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων P_n του $[a\,b]$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}\big(U(f,P_n)-L(f,P_n)\big)=0$.

Απόδειξη "$\Longrightarrow$" θέτουμε $\varepsilon=1/n$ στο κριτήριο Riemann του μαθήματος 13.

"$\Longleftarrow$" Το όριο είναι $=0 \Longrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n\geq n_0\ U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$ ικανοποιώντας το κριτήριο Riemann του μαθήματος 13. (πχ για $n=n_0$) $\square$

Παράδειγμα Η $f(x)=x^2$ στο $[0\ 1]$ είναι R-ολοκληρώσιμη διότι αν

$$P_n=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1\right\}$$ & αφού $f\uparrow$

$$L(f,P_n)=f(0)\frac{1}{n}+f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n^2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{1+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}=\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3}$$

$$=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

$$U(f,P_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Άρα $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$

Παράδειγμα (συνάρτηση Dirichlet) $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\[2mm] 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Θα δούμε ότι αυτή η συνάρτηση **ΔΕΝ** είναι R-ολοκληρώσιμη.

Αν $\mathcal{P}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[0,1]$, $\mathcal{P}=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=1\}$

$\cancel{L(f,\mathcal{P})=}$ $\quad m_k=\inf\limits_{x_k\le x\le x_{k+1}} f(x)=0$ Άρα

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{n-1}\cancel{1}^{\,0}(x_{k+1}-x_k)=0$$ Όμως

$M_k=\sup\limits_{x_k\le x\le x_{k+1}} f(x)=1$, οπότε $U(f,\mathcal{P})=\sum\limits_{k=0}^{n-1}1(x_{k+1}-x_k)=1$

Συνεπώς $\forall\mathcal{P}$ ισχύει $U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})=1$ άρα f όχι Riemann ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα $f(x)=\sqrt{x}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ η $\mathcal{P}_n=\left\{0<\left(\tfrac{1}{n}\right)^2<\left(\tfrac{2}{n}\right)^2<\dots<\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2<\left(\tfrac{n}{n}\right)^2=1\right\}$

$$L(f,\mathcal{P}_n)=f(0)\left(\tfrac{1}{n}\right)^2+f\left(\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(\left(\tfrac{2}{n}\right)^2-\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right)+f\left(\left(\tfrac{2}{n}\right)^2\right)\left(\left(\tfrac{3}{n}\right)^2-\left(\tfrac{2}{n}\right)^2\right)+\dots+f\left(\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2\right)\left(\left(\tfrac{n}{n}\right)^2-\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{2^2-1^2}{n^2}\right)+\frac{2}{n}\,\frac{3^2-2^2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n}\,\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}$$

Ομοίως (άσκηση)

$$U(f,\mathcal{P}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\,\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}.$$ Άρα $U(f,\mathcal{P}_n)-L(f,\mathcal{P}_n)=$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\,\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}=\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\frac{k+1}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}_{=\left(\frac{n}{n}\right)^2-0}=\frac{1}{n}\longrightarrow 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα $f(a)\le f(x)\le f(b)$ (οπότε είναι και φανερά φραγμένη). Για $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n=\left\{a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\ \dots,\ a+(n-1)\frac{b-a}{n},\ a+n\frac{b-a}{n}=b\right\}$$

του $[a,b]$ σε n ίσου μήκους διαστήματα. Αν $\varepsilon>0$ τότε αν βρούμε n ώστε $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$ θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη. Θέτουμε $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$, $k=0,1,\dots,n$. Αφού $f\uparrow$ στο $[x_k,x_{k+1}]$ έχει ελάχιστη τιμή $f(x_k)$ και μέγιστη $f(x_{k+1})$. Άρα

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})\right)$$

Ενώ ομοίως $$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$$

Άρα $$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό φρ. διάστημα είναι και ομ. συνεχής. Έστω ότι $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Επίσης βρίσκουμε $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{b-a}{n}<\delta$ (αφού $\delta>0$ & $\dfrac{b-a}{n}\to 0$)

Φτιάχνουμε την ισομήκη διαμέριση που κάθε διαστημάτης έχει (1)

μήκος $\frac{b-a}{n}$, δηλ $\mathcal{P}_n = \{\underbrace{\overset{x_0}{a}, \overset{x_1}{a+\frac{b-a}{n}}, \overset{x_2}{a+2\frac{b-a}{n}}, \dots, \overset{x_n}{a+n\frac{b-a}{n}} = b}_{n+1 \text{ σημεία}}\}$ (2)

$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n.$ n διαστήματα πλάτους $\frac{b-a}{n}$ (3)

Η f στο $[x_k, x_{k+1}]$ ως συνεχής σε κλειστό φρ. διάστημα έχει (4)

Ελάχιστη ή μέγιστη τιμή δηλ $\exists\, y_1$ ή y_2 ώστε $M_k = \sup\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x) = f(y_1)$ (5)

και $m_k = \inf\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x) = f(y_2)$. (6)

Αλλά $|y_1 - y_2| \le |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} < \delta$ (7)

οπότε $M_k - m_k = f(y_1) - f(y_2) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Άρα (8)

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (9)$$

$$< \sum_{0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \quad (10)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

RIEMANN

Θεώρημα Αν $f(x) = c$ στο $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = c(b-a)$ (11)

Απόδειξη Αφού f σταθερή σε κάθε διάστημα κάθε διαμέρισης (12)

η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι c. Άρα (13)

αν $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[a,b]$ (14)

θα έχουμε (15)

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \sum (c - c)(x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (16)$$

Άρα η f είναι R-ολοκληρώσιμη και (17)

$$\int_a^b c\, dx = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} \sum c\,(x_{k+1} - x_k) = \sup_{\mathcal{P}} c \cdot (b-a) = c(b-a) \quad (18)$$

Ομοίως και $\overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a)$ Άρα $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ (1) ∎

Θεώρημα Αν f, g ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ τότε και (2)
η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει (3)

$$\int_a^b ((f+g)(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad (4)$$

Απόδειξη P διαμέριση του $[a,b]$: $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ $m_k=\inf_{[x_k,x_{k+1}]}(f+g)(x)$ (5)
$M_k=\sup_{[x_k,x_{k+1}]}(f+g)(x)$ m_k', M_k' για την f, m_k'', M_k'' για την g. (6)

$\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ $m_k'+m_k'' \le f(x)+g(x) \xRightarrow{\inf} m_k'+m_k'' \le m_k$ (7)

$M_k'+M_k'' \ge f(x)+g(x) \xRightarrow[x]{\sup} M_k'+M_k'' \ge M_k$ (8)

Άρα $L(f,P)+L(g,P) \overset{(7)}{\le} L(f+g,P) \le U(f+g,P) \overset{(8)}{\le} U(f,P)+U(g,P)$ (*) (9)

Αφού f,g ολοκληρώσιμες $\exists$ διαμέριση P_1 και P_2 ώστε (10)

$U(f,P_1)-\frac{\varepsilon}{2} \le \int_a^b f(x)\,dx \le L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}$ και (11)

$U(g,P_2)-\frac{\varepsilon}{2} \le \int_a^b g(x)\,dx \le L(g,P_2)+\frac{\varepsilon}{2}$. Θέτοντας $P=P_1\cup P_2$ (12)

την κοινή εκλέπτυνσή τους $\Longrightarrow$ (13)

$U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon \overset{(11)+(12)}{\le} \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \overset{(11)+(12)}{\le} L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon$ (14)

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $U(f+g,P)-\varepsilon \le \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \le L(f+g,P)+\varepsilon$ (15)

(16)
$\xRightarrow[\inf]{\sup_P}$ $\overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx-\varepsilon \le \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx+\varepsilon$ (**)

άρα

$\boxed{1^{ον}}$ $\overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx - \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx \le 2\varepsilon$ ~~⟹ f+g R-ολοκλ.~~ (17)

$\xRightarrow{\varepsilon\to 0}$ $\overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx = \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx$ άρα $f+g$ (18)

R-ολοκληρώσιμη. και από την (**) (19)

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad ∎ \quad (20)$$