Μάθημα 16

Θεώρημα Έστω ότι η $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση.

Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Απόδειξη "$\Longleftarrow$" Έστω ότι $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $\delta>0$ ώστε αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση με $\|P\|=\max\{x_{k+1}-x_k \quad k=0,1,\dots,n-1\}<\delta$ και κάθε επιλογή σημείων $\Xi=\{\xi_0\le\xi_1\le\dots\le\xi_{n-1}\}$ με $\xi_k\in[x_k\,x_{k+1}]$ να ισχύει

$$|R(f,P,\Xi)-I(f)|<\varepsilon/4 \Rightarrow I(f)-\frac{\varepsilon}{4}<R(f,P,\Xi)<I(f)+\frac{\varepsilon}{4}$$

$m_k=\inf\{f(x) : x\in[x_k\,x_{k+1}]\}$ άρα το $m_k+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ δεν είναι κάτω φράγμα του $\{f(x): x\in[x_k\,x_{k+1}]\}$ άρα υπάρχει $\xi_k'\in[x_k\,x_{k+1}]$ ώστε $m_k+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}>f(\xi_k')\Rightarrow m_k>f(\xi_k')-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

Ομοίως για το M_k υπάρχει $\xi_k''\in[x_k\,x_{k+1}]$ ώστε $M_k<f(\xi_k'')+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Άρα $m_k(x_{k+1}-x_k)>f(\xi_k')(x_{k+1}-x_k)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_{k+1}-x_k)$

$$\Rightarrow L(f\,P)>R(f,P,\Xi')-\frac{\varepsilon}{4}>I(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $\Xi'=\{\xi_0'\ \xi_1'\ \dots\ \xi_{n-1}'\}$. Ομοίως $M_k(x_{k+1}-x_k)<f(\xi_k'')(x_{k+1}-x_k)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_{k+1}-x_k)$

$$\Rightarrow U(f\,P)<R(f\,P\,\Xi'')+\frac{\varepsilon}{4}\overset{(9)}{<}I(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $\Xi''=\{\xi_0'',\xi_1'',\dots,\xi_{n-1}''\}$.

Άρα $0\le U(f\,P)-L(f\,P)<I(f)+\frac{\varepsilon}{2}-I(f)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow f$ Darboux ολοκληρώσιμη.

ΣΕΛ 2

και επιπλέον $I(f)-\frac{\varepsilon}{2} < L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(f,P) < I(f)+\frac{\varepsilon}{2}$ (1)

σελ 1 γραμμή $\boxed{16}$ — αφού f Darboux ολοκλ. — σελ 1 γραμμή $\boxed{14}$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx} - I(f)\right| < \varepsilon, \text{ άρα } I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \quad (2)$$

(3)

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $\varepsilon>0$ και f ~~...~~ Darboux ολοκληρώσιμη (4) στο $[a,b]$. $\exists\, P_0$ ώστε $0 \le U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon/4$ (5) και $\left|\int_a^b f(x)dx - L(f,P_0)\right| < \varepsilon/4$ και $\left|\int_a^b f(x)dx - U(f,P_0)\right| < \varepsilon/4$ (6)

Έστω ότι M φράγμα της $|f|$ δηλ. $|f(x)| \le M$. $\forall x\in[a,b]$ (7)

Υποθέτουμε ότι $P_0=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{n_0}=b\}$. Θέτουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{6n_0M}>0$ (8)

Θα αποδείξουμε ότι $\forall\, P$ με $\|P\|<\delta$ ισχύει

$$\left|R(f,P,\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall\, \Xi. \quad (9)$$

Έστω λοιπόν P με $\|P\|<\delta$. Θέτουμε $P_1 = P\cup P_0$ (10)

Για την P_1 ισχύει το παρακάτω διότι (11)

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,P_0) \le L(f,P_1) \le R(f,P_1,\Xi_1) \quad (12)$$

$$\le U(f,P_1) \le U(f,P_0) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - R(f,P_1,\Xi_1)\right| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2} \;(<\varepsilon). \quad (14)$$

Εμείς όμως θέλουμε να δείξουμε το προηγούμενο για την P (15)

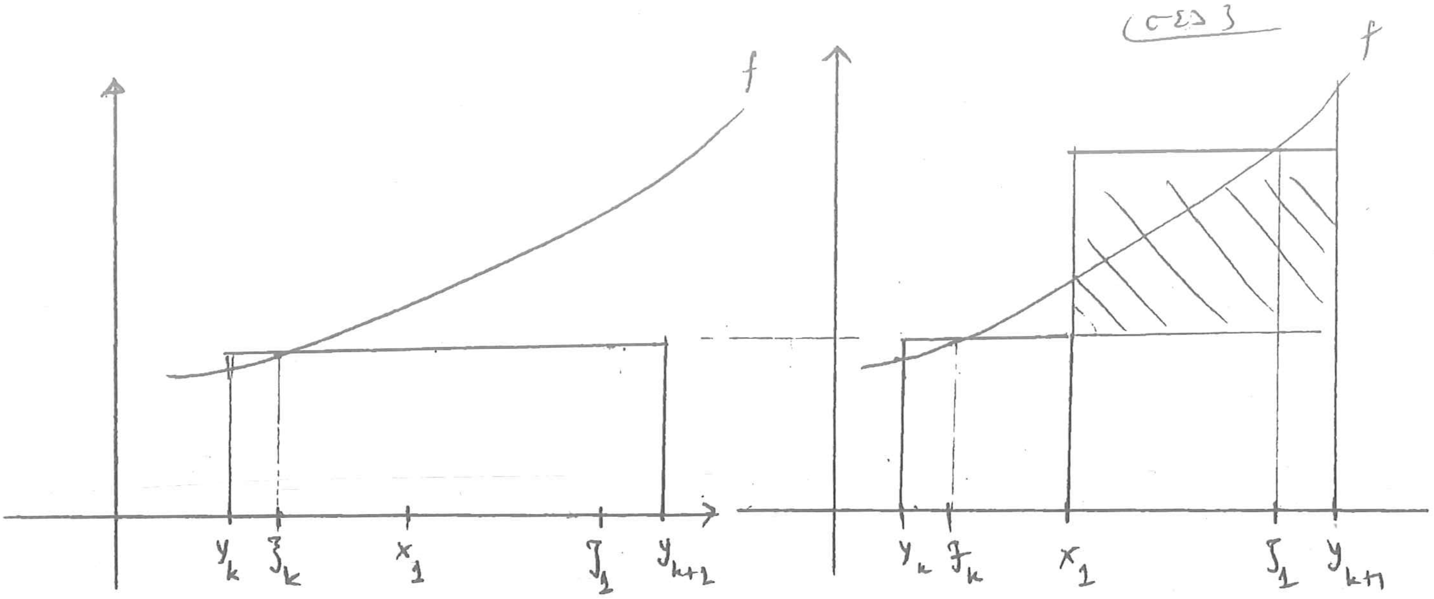
και όχι για την P_1. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε επιλογή (16)

σημείων Ξ στην P υπάρχει επιλογή σημείων Ξ_1 στην P_1 ώστε (17)

$$\left|R(f,P,\Xi) - R(f,P_1,\Xi_1)\right| < \varepsilon/2 \quad (18)$$

Οπότε $\left|\int_a^b f(x)dx - R(f,P,\Xi)\right| \le \left|\int_a^b f(x) - R(f,P_1,\Xi_1)\right| + \left|R(f,P_1,\Xi_1) - R(f,P,\Xi)\right|$ (19)

$< \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$ (20)



Θα προσθέσουμε στην P ένα-ένα τα σημεία της P_0 φτάνοντας (1)
στην P_1 μετά από n_0-1 το πολύ βήματα. (τα $x_0=a$ κ $x_{n_0}=b$ είναι ήδη στην P) (2)
Ας προσθέσουμε στην P το x_1 και να υπολογίσουμε πόσο αλλάζει το (3)
$R(f,P,\Xi)$. Έστω ότι $P=\{a=y_0<y_1<\dots<y_n=b\}$ και (4)
$\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$ τυχαία επιλογή σημείων της P. (5)
Προσθέτοντας το x_1 αυτό ανήκει σε κάποιο διάστημα της P (6)
έστω το $[y_k\ y_{k+1}]$. Σε αυτό ανήκει κ το ξ_k. Φανερά (7)
είτε $\xi_k\in[y_k\ x_1]$ είτε $\xi_k\in(x_1, y_{k+1}]$. Χβτγ ας υποθέσουμε (8)
$\xi_k\in[y_k\ x_1]$. Θεωρούμε τυχόν σημείο ζ_1 στο $[x_1\ y_{k+1}]$. (9)
(10)
Οπότε (δες σχήμα)

$$\left|R(f,P,\Xi)-R(f,P\cup\{x_1\},\Xi\cup\{\zeta_1\})\right|=\left|(y_{k+1}-x_1)\cdot(f(\zeta_1)-f(\xi_k))\right| \quad (11)$$

$$<\delta\cdot(|f(\zeta_1)|+|f(\xi_k)|)\le\delta\cdot 2M=\frac{\varepsilon}{6n_0M}\,2M=\frac{\varepsilon}{3n_0} \quad (12)$$

Κάθε φορά που προσθέτουμε ένα σημείο το άθροισμα Riemann (13)
μεταβάλλεται κατά το πολύ $\frac{\varepsilon}{3n_0}$. Άρα η συνολική (14)
μεταβολή όταν προστεθούν n_0-1 σημεία είναι $\frac{\varepsilon}{3n_0}(n_0-1)<$ (15)

$$<\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

Αρα $\left|R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

ϗ $\left|\int_a^b f(x)\,dx - R(f\ P_1\ \Xi_1)\right| < \varepsilon/2$ (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|R(f\ P\ \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \quad (3)$$

$$= \left|R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1) + R(f\ P_1\ \Xi_1) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \quad (4)$$

$$\leq \left|R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1)\right| + \left|R(f\ P_1\ \Xi_1) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \quad (5)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (6)$$