Μάθημα 17

Ασκήσεις

① Δείξτε ότι αν $f:[a\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη τότε είναι φραγμένη (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η f έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή)

Λύση

Αν f όχι φραγμένη $\exists\, t_n \in [a\,b]$ ώστε $|f(t_n)|\longrightarrow+\infty$
χβτγ $f(t_n)\longrightarrow+\infty$. $t_n\in[a\,b]\Longrightarrow$ υπάρχει συγκλίνουσα
της t_n. Έστω $t_{k_n}\longrightarrow t_0$ Άρα
$f(\quad)\xrightarrow[t_{k_n}\to t_0]{}+\infty$. Αφού f R-ολοκληρώσιμη υπάρχει
αριθμός $I(f)$ ώστε $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ ώστε $\forall\, P$ διαμ.
του $[a\,b]$ & $\forall\,\Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων στην P να
ισχύει $|\qquad|<\quad\Longrightarrow\quad\leq R(\qquad)\leq$

Αυτό ισχύει $\forall\,\Xi$ άρα μπορώ να διαλέξω πρώτα το διάστημα
$[x_k\,x_{k+1}]$ που περιέχει το t_0 και μετά να χρησιμοποιήσω
για ξ_k στο $[x_k\,x_{k+1}]$ το t_{k_n} (επίσης αν $x_k = t_0$ και
$t_{k_n}<t_0$ οπότε σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσω για
ξ_{k-1} στο $[x_{k-1}\,x_k]$ το t_{k_n}, και ομοίως αν $t_0=x_{k+1}$ &
$t_{k_n}>t_0$ θέτουμε ξ_{k+1} στο $[x_{k+1}\,x_k]$ το t_{k_n})

Σε κάθε περίπτωση το $\mathcal{R}(f\,P\,\Xi)$ δεν μπορεί να είναι
φραγμένο. Άτοπο.

Τέλος η $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x=\pm1\\ x & \text{αν } -1<x<x\end{cases}$ είναι R-ολοκληρώσιμη (φραγμένη) αλλά δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή

② Αν f ολοκληρώσιμη $\Longrightarrow$ $|f|$ ολοκλ. από τη θεωρία.

Δείξτε ότι το αντίστροφο <u>δεν</u> είναι αληθές

$$f(x) = \begin{cases} & x \in [0\ 1] \cap \mathbb{Q} \\ & x \in [0\ 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

③ Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \in [-1\ 1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

είναι ολοκληρώσιμη.

(παρατηρήστε ότι η f δεν είναι ούτε μονότονη ούτε συνεχής)

<u>Λύση</u> Έστω ότι $1 > \varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[-1\ 1]$ ώστε $U(f\ P) - L(f\ P) < \varepsilon$.

Στο διάστημα $\left[\frac{\varepsilon}{24}, 1\right]$ και στο $\left[-1, -\frac{\varepsilon}{24}\right]$ η f είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής. Άρα $\exists\ P_1$ διαμ του $\left[\frac{\varepsilon}{12}, 1\right]$ και P_2 του $\left[-1, -\frac{\varepsilon}{24}\right]$ ώστε

$$< \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}.$$

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$. Φανερά ισχύει

$$U(f\ P) - L(f\ P) = U(f\ P_2) - L(f\ P_2) + U(f\ P_1) - L(f\ P_1) + \left(\sup_{[-\frac{\varepsilon}{24}, \frac{\varepsilon}{24}]} f(x) - \inf_{[-\frac{\varepsilon}{24}, \frac{\varepsilon}{24}]} f(x) \right) \left(\frac{\varepsilon}{24} - \left(-\frac{\varepsilon}{24}\right) \right)$$

$$< \ \text{—} + \text{—} + 4 \frac{\varepsilon}{12} =$$

④ Αν $f:[a\ b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και είναι συνεχής σε κάθε σημείο εκτός από κάποιο $x_0\in(a\ b)$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση Έστω ότι $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[0\,1]$ και $\varepsilon>0$

Θα βρούμε P διαμ. του $[a\,b]$ ώστε $U(f\,P)-L(f\,P)<\varepsilon$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $[a\ \ x_0-\frac{\varepsilon}{24}]$ και $[x_0+\frac{\varepsilon}{24},\ b]$

στα οποία η f είναι   και άρα

Οπότε υπάρχει   και   διαμ. των παραπάνω διαστημάτων

ώστε $<\varepsilon/3$ και

Θέτουμε $P=P_1\cup P_2$ οπότε

$U(f\,P)-L(f\,P)=$

$$+(\qquad)\left(\left(x_0+\frac{\varepsilon}{24}\right)-\left(x_0-\frac{\varepsilon}{24}\right)\right)$$

$$<\quad+\quad+\ 2M\cdot\frac{\varepsilon}{12}$$

Παρατήρηση Το ίδιο ισχύει αν η f έχει N σημεία ασυνέχειας $x_1, x_2, \dots x_N\in(a\ b)$. Απλά κάντε πλήρη επαγωγή στο $N\in\mathbb{N}$. (άσκηση)

(Η άσκηση ④ είναι το $N=1$. Αν ισχύει για $\le N$ σημεία ασυνέχειας και τώρα έχετε μια συνάρτηση που έχει $N+1$ σημεία ασυνέχειας όπου x_{N+1} είναι το $N+1$-οστό σημείο παρατηρήστε ότι στο $[a\ \ x_{N+1}-\frac{\varepsilon}{24}]$ και $[x_{N+1}+\frac{\varepsilon}{24},\ b]$ έχει λιγότερα (μία) από N σημεία ασυνέχειας)

Άσκηση 5 Αν $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a\,b]$

και $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ τότε $f(x)=0 \ \forall x\in[a\,b]$

Λύση Αν $\exists\ x_0\in[a\,b]$ ώστε $f(x_0)>0$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$.

Άρα $\exists$ ώστε $\forall\ |\quad| < \delta \Longrightarrow |\quad| <$

$\Longrightarrow \quad - \quad < \quad < \quad \Longrightarrow \quad < f(x) <$

Άρα (αν υποθέσουμε ότι $x_0\in(a\,b)$)

$$0=\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx.$$

$$\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \quad dx = 2\delta\cdot \quad > 0$$

άτοπο

Αν $x_0=a$ ή $x_0=b$ ομοίως (άσκηση)

Άσκηση 6 Έστω ότι $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0\in(a\,b)$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x_0)$

Λύση Παρατηρήστε ότι $f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt$

(γιατί $\int_{x_0}^{x} c\,dt = c(x-x_0)$). Άρα (αν $x>x_0$)

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)dt\right|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

(*)

Αλλά f συνεχής στο x_0 άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ ώστε (1)

αν $|t - \quad| < \delta \Rightarrow |f(t) - \quad| < \varepsilon$ (2)

Έτσι, για αυτό το δ, αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (3)

$$\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \le \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt = \varepsilon (x - x_0) \quad (4)$$

Συνεχίζοντας από (*) $\le \dfrac{1}{|x - x_0|}\, \varepsilon\, |x - x_0| = \varepsilon$. (5)

Δηλ. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (6)

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - f(x_0) \right| < \varepsilon \quad \text{οπότε} \quad (7)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f(x_0) \qquad \blacksquare \quad (8)$$