Μάθημα 19

Αν όμως η G' είναι ολοκληρώσιμη τότε το προηγούμενο ισχύει:

Θεώρημα (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν $G:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και G' ολοκληρώσιμη

τότε
$$\int_a^b G'(t)\,dt = G(b)-G(a).$$

Απόδειξη Έστω ότι $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$.

Από το Θ. Μέσης Τιμής του Απ. Λογ. $\exists\ \xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$ ώστε

$$\frac{G(x_{k+1})-G(x_k)}{x_{k+1}-x_k} = G'(\xi_k) \Rightarrow G(x_{k+1})-G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

Άρα

$$L(G',P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(G')(x_{k+1}-x_k) \leq \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$

$= U(G',P)$ αλλά

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(G(x_{k+1})-G(x_k)\right)} = \cancel{G(x_1)}-G(\underset{a}{\underset{\parallel}{x_0}})+\cancel{G(x_2)}-\cancel{G(x_1)}+$$

$$+\dots+G(\underset{b}{\underset{\parallel}{x_n}})-\cancel{G(x_{n-1})}$$

$$= G(b)-G(a)$$

Άρα
$$L(G',P) \leq G(b)-G(a) \leq U(G',P)$$

$\downarrow \sup_P$ $\qquad \downarrow \inf_P$

$$\int_a^b G'(x)dx = \underline{\int_a^b} G'(x)dx \leq G(b)-G(a)$$

$$G(b)-G(a) \leq \overline{\int_a^b} G'(x)\,dx = \int_a^b G'(x)dx$$

Άρα
$$\boxed{\int_a^b G'(x)dx = G(b)-G(a)}$$

∎

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

ή κατά παράγοντες

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά μέρη) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με f' και g' ολοκληρώσιμες. Τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(b)g(b)-f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(άλλως $\displaystyle\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$)

Απόδειξη Οι fg, fg' και $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες γιατί οι f,g είναι συνεχείς (ως παραγωγίσιμες) και άρα ολοκληρώσιμες. Οι f',g' είναι εξ υποθέσεως ολοκληρώσιμες. Άρα είναι ολοκληρώσιμα και τα γινόμενα fg, $f'g$, fg' καθώς και το $f'g+fg'=(fg)'$. Άρα, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα θα έχουμε

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b ((fg)(x))'dx =$$

$$= (fg)(b)-(fg)(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(b)g(b)-f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \blacksquare$$

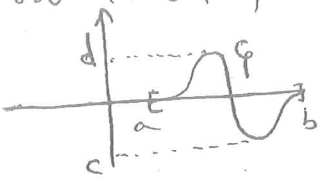
Θεώρημα (πρώτο θ. αντικατάστασης) Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη. (Το σύνολο τιμών της φ είναι διάστημα της μορφής $[c,d]$ ($c=\min\varphi$, $d=\max\varphi$)) και αν $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ισχύει

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds \overset{s=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Απόδειξη Η f ως συνεχής στο $[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ορίζουμε $F: \overset{=[c,d]}{I} \to \mathbb{R}$ με $\displaystyle F(x)=\int_{\varphi(a)}^{x} f(s)\,ds$

(Το $\varphi(a)$ δεν ισούται αναγκαστικά με κάποιο άκρο c ή d

Πχ η  στέλνει και το a και το b στο 0, ενώ τα $c, d \neq 0$)

Το πρώτο θεμελιώδες θ. του Απ. Λογ. λέει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $[c,d]$ και $F' = f$. $\Rightarrow F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{F'(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\substack{\|\,\text{κανόνας αλυσίδας}\\ ((F\circ\varphi)(t))'}}\,dt.$$

Άρα από το 2ο θεμελιώδες θ. του Απ. Λογ.

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(s)\,ds$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα (2ο θ. αντικατάστασης) Έστω ότι $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση (δηλ. ψ' συνεχής) με $\psi'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ (ή ψ γνησίως μονότονη). $\wedge$ $I = \psi([a,b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε

$$\int_a^b f(\psi(t))\,\underset{}{\overset{\psi(t)=s}{dt}} = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)\,(\psi^{-1})'(s)\,ds.$$

Απόδειξη ψ' συνεχής και $\psi' \neq 0 \Rightarrow \psi'(x) > 0$ $\forall x$ ή $\psi'(x) < 0$ $\forall x$ δηλ. $\psi \uparrow$ ή $\psi \downarrow$. Ας υποθέσουμε ότι $\psi\uparrow$. Τότε ορίζεται η ψ^{-1} και είναι συνεχής. Αφού $\psi\uparrow \Rightarrow \psi([a,b]) = [\psi(a), \psi(b)]$

Εφαρμόζουμε το 1ο θ. αντικατάστασης στην $f\cdot(\psi^{-1})'$ (και ψ στη θέση της φ) οπότε έχουμε

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} (f\cdot(\psi^{-1})')(s)\,ds = \int_a^b \underbrace{(f\cdot(\psi^{-1})')(\psi(t))}_{f(\psi(t))\,(\psi^{-1})'(\psi(t))}\,\psi'(t)\cdot dt$$

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t) \quad ((\psi^{-1})' \circ \psi)(t) \quad \psi'(t)\, dt$$ (1)

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t) \quad (\psi^{-1} \circ \psi)'(t)\, dt$$ (2)

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t)\, dt.$$ (3)

<u>Παράδειγμα</u> Υπολογίστε το $\int_0^{\pi} x \cos(x^2+1)\, dx$ (4)

Θα εφαρμόσουμε το 1ο θ. αντικατάστασης: θέτουμε $f(x) = \cos x$ (5)

$\varphi(x) = x^2+1$, $\varphi'(x) = 2x$ ολοκληρώσιμη ως συνεχής στο $[0, \pi]$ (6)

Άρα $\int_0^{\pi} x \cos(x^2+1)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi'(x) \cos(\varphi(x))\, dx$ (7)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx \quad \underline{\underline{1^{\text{ο}}\ \text{θ. αντικ.}}}$$ (8)

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_1^{\pi^2+1} \cos(x)\, dx =$$ (9)

$$= \frac{1}{2} \sin x \Big|_{x=1}^{x=\pi^2+1} = \frac{1}{2}\left(\sin(\pi^2+1) - \sin(1)\right)$$ (10)

∎