(σελ 1)

Μάθημα 21

Ασκήσεις: Υπολογίστε τα $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ και $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ (1)

ξεκινώντας ως εξής: (2)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \xlongequal{\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha} \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \quad (3)$$

$$= \int \frac{1}{2\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\,\cos^2(x/2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \quad (4)$$

(5)

και επιλέξτε κατάλληλη αντικατάσταση.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\,dx \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{2}} \quad (6)$$

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε παραδείγματα που περιείχαν (7)

το $\sqrt{a^2-x^2}$. Αν όμως περιέχουν την έκφραση $\sqrt{x^2-a^2}$ (8)

τότε η αντικατάσταση είναι $x = \frac{a}{\cos u}$, οπότε (9)

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u}-a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1} = a\sqrt{\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}} = a\tan u \quad (10)$$

και $dx = a(\cos^{-1}u)'\,du = a\,(-1)\cos^{-2}u\cdot(-\sin u)\,du =$ (11)

$$= \frac{a\sin u}{\cos^2 u}\,du \quad (12)$$

(13)

Πχ

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx \xlongequal[dx=\frac{2\sin u}{\cos^2 u}du]{x=\frac{2}{\cos u}} \int \frac{1}{\frac{2}{\cos u}\sqrt{\frac{4}{\cos^2 u}-4}}\,\frac{2\sin u}{\cos^2 u}\,du$$

(14)

$$= \int \frac{\cos u}{2\sqrt{\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}}}\,\frac{\sin u}{\cos^2 u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u\,\sin u}{\frac{\sin u}{\cos u}\,\cos^2 u}\,du = \frac{1}{2}\int du$$

(15)

$$= \frac{1}{2}u + c =$$

$$\frac{\cos u = \frac{2}{x}}{\Rightarrow u = \arccos\frac{2}{x}} \quad \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + c$$ (1)

Ολοκληρώματα που περιέχουν το $\sqrt{x^2+a^2}$ (2)

Σε αυτά εκμεταλλευόμαστε το ότι $\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ (3)

για να απαλλαγούμε από τη ρίζα. Οπότε θέτουμε (4)

$x = a\tan u$. Έχουμε $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 u + a^2} = a\,\frac{1}{\cos x}$ (5)

και $dx = \frac{a}{\cos^2 u}\,du$

πχ $$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \;\overset{x=\tan u}{\underset{dx=\frac{1}{\cos^2 u}du}{=}}\; \int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\tan u}\,\frac{1}{\cos^2 u}\,du$$ (6)

$$= \int \frac{1}{\sin u\cos^2 u}\,du$$ (7)

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (9)

$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$ (10)

$\Rightarrow \int f'g = \int (fg)' - \int fg'$, οπότε (11)

αν fg συνεχής $\Rightarrow \int (fg)' = fg$, άρα 12

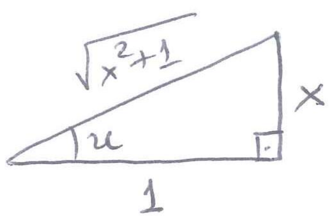
$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$ (14)

$$= \int (\tan u)'\,\frac{1}{\sin u}\,du$$ (8)

$$= \frac{\tan u}{\sin u} - \int (\tan u)(\sin^{-1}u)'\,du$$ (13)

$$= \frac{1}{\cos u} - \int \frac{\sin u}{\cos u}(-1)\frac{1}{\sin^2 u}\cos u\,du = \frac{1}{\cos u} + \int \frac{1}{\sin u}\,du$$ (15)

$$\underset{\text{του μαθήματος 21}}{\overset{\text{άσκηση στην αρχή}}{=}} \frac{1}{\cos u} + \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + c = \frac{1}{\cos(\arctan x)} + \ln\left|\tan\frac{\arctan x}{2}\right| + c$$ (16)



$$\cos(\arctan x) = \cos u = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$ (17)

$$\cancel{\tan}\ \tan\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \tan\frac{u}{2} \underset{\text{σελ 4}}{\overset{\text{«Τσεκουράκι»}}{=}} \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$ (18)

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+1} + 1}}$$ (19)

καταλήγοντας $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} + c$ (1)

Ασκηση $\displaystyle I=\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx \xrightarrow[\text{κατά παράγοντες}]{\text{ολοκλήρωση}} \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\frac{1}{\sin x}\,dx =$ (2)

$$= \int (-\cot x)'\,\frac{1}{\sin x}\,dx = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int (-\cot x)\,(\sin^{-1} x)'\,dx \quad (3)$$

$$= -\frac{\cot x}{\sin x} + \int \cot x\,(-1)\,\frac{1}{\sin^2 x}\,\cos x\,dx \quad (4)$$

$$= -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\,dx \quad (5)$$

$$= -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \quad (6)$$

$$= -\frac{\cot x}{\sin x} - I + \int \frac{1}{\sin x}\,dx \Longrightarrow 2I = -\frac{\cot x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\,dx \quad (7)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cot x}{\sin x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) + c \quad (8)$$

(σελ 4)

Ασκήσεις Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16+x^2}}\,dx$ (4)

$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ θέτοντας $x=\sin^2\theta$ (5)

$\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ θέτοντας $x=a\cos(2t)$ (6)

$\int e^x x\,dx$ (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Παρατηρήστε $e^x=(e^x)'$) (7)

$\int e^x x^2\,dx$ (8)

$\int e^x (ax+b)\,dx$

$\int e^{2x}(x^2+1)\,dx$ $\left(e^{2x}=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\right)$ (9)

$\int \ln x\,dx$ $\left(1=(x)'\right)$

$\int x\ln x\,dx$ $\left(x=\left(\frac{x^2}{2}\right)'\right)$

$\int x^n \ln x\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$

$\int e^x\cos x\,dx$ (θέστε $I=\int e^x\cos x\,dx$ και κάντε ολοκλήρωση κατά παράγοντες δύο φορές) (10)

$\int e^{nx}\cos(mx)\,dx$ (11)

$\int e^{nx}\sin(mx)\,dx$ (12)

ΘΣΔ 5

$$\int e^x \sin x \, dx = I = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx \quad (1)$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx \quad (2)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \, dx \right) \quad (3)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \quad (4)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - I \quad (5)$$

$$\Longrightarrow \quad 2I = e^x \sin x - e^x \cos x \quad (6)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x \right) + c \quad (7)$$