Μάθημα 22

Άσκηση $\int x \sin^2 x \, dx = \int x \, \dfrac{1-\cos 2x}{2} \, dx =$ (1)

$= \dfrac{1}{2} \left(\int x dx - \int x \cos 2x \, dx \right)$ (2)

$= \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{x^2}{2} - \int x \cos 2x \, dx \right)$ (3)

$\int x \cos(2x) dx = \int x \left(\dfrac{\sin(2x)}{2} \right)' dx =$ (4)

(5)

$=$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$ (10)

Αν $n \geq m$ διαιρούμε τα πολυώνυμα ώστε να προκύψει (11)

$f =$ πολυώνυμο $+ \dfrac{p(x)}{q(x)}$ με $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$ (12)

π.χ. $f(x) = \dfrac{3x^5 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ (13)

$3x^5 + x - 1 \;\big|\; x^3 + x - 2$ (14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

Άρα $$f(x) = 3x^2 - 3 + \frac{6x^2+4x+5}{x^3+x-2}$$

Τώρα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $q(x)$ εάν αυτό είναι εφικτό. Αν $q(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}$ και γράφουμε το κλάσμα $p(x)/q(x)$ ως εξής

$$\frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}} +$$

$$+ \cdots + \frac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}} + \cdots + \frac{B_{\ell 1}x+\Gamma_{\ell 1}}{(x+\beta_\ell x+\gamma_\ell)} + \frac{B_{\ell 2}x+\Gamma_{\ell 2}}{(x+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^2} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{B_{\ell s_\ell}x+\Gamma_{\ell s_\ell}}{(x+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}}$$

Οπότε η ολοκλήρωση ανάγεται στην ολοκλήρωση δύο τύπων συναρτήσεων: της $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ και του $\frac{Ax+B}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$

με $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Ας ολοκληρώσουμε όμως το παράδειγμά μας:

Το x^3+x-2 έχει ρίζα το $x=1$. Άρα

$$x^3+x-2 \;\big|\; \underline{x-1}$$

Άρα

$$f(x) = 3x^2 - 3 + \frac{6x^2+4x+5}{(x-1)\,(x^2+x+2)}$$. Γράφουμε το κλάσμα (1)

στη μορφή: $$\frac{6x^2+4x+5}{(x-1)\,(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+2}$$ (2)

Βρίσκουμε τα A, B, Γ με … κ ομαδοποίηση όρων: (3)

$$6x^2+4x+5 = A(x^2+x+2) + (x-1)(Bx+\Gamma)$$ (4)

$$= Ax^2 +$$ (5)

(6)

(7) Άρα $A+B =$

(8) $A+\Gamma-B =$ $\Big\}\xrightarrow{(+)}$ $\Big\}\xrightarrow{(-)}$ $2\Gamma =$ (10)

(9) $2A-\Gamma =$ $2A-\Gamma =$ (11)

$\Rightarrow \boxed{\Gamma =}$ $2A =$ $\Rightarrow \boxed{A =}$ & $\boxed{B =}$ (12)

Συνεπώς $$f(x) = 3x^2-3 + \frac{5/4}{x-1} + \frac{-5/4\,x + 5/2}{x^2+x+2}$$ (13)

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$ (14)

$$\int \frac{-\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}}{x^2+x+2}\,dx = -\frac{5}{4}\int \frac{x-2}{x^2+x+2}\,dx =$$ (15)

$$= -\frac{5}{4}\int \frac{2x-4}{x^2+x+2}\,dx = -\frac{5}{4}\int \frac{2x+1-5}{x^2+x+2}\,dx$$ (16)

$$= -\frac{5}{4}\int \frac{(x^2+x+2)'}{x^2+x+2}\,dx + \frac{25}{4}\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$$ (17)

$$= -\frac{5}{4}\cdot \qquad + \frac{25}{4}\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$$ (18)

(σελ 4

Μενει να υπολογισει το $\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$: Συμπληρωνουμε (1)

το τετραγωνο: $= \int \frac{1}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}\,dx =$ (2)

$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2-\frac{1}{4}}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx =$ (3)

$= \frac{4}{7}\int \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{7/4}+1}\,dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)^2+1}\,dx$ ☆ (4)

αντικαθιστουμε $t = \frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}} \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{4}}\,t-\frac{1}{2}=x$ (5)

$\Rightarrow dx = \sqrt{\frac{7}{4}}\cdot dt$. Συνεπως (6)

☆ $= \frac{4}{7}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{\frac{7}{4}}\,dt = \sqrt{\frac{4}{7}}\arctan(t) =$ (7)

$= \sqrt{\frac{4}{7}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)$. Συνεπως βάζοντας τα όλα μαζί (8)

$\int \frac{3x^5+x-1}{x^3+x-2}\,dx = x^3-3x+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{5}{4}\ln|x^2+x+2|$ (9)

$+\frac{25}{4}\sqrt{\frac{4}{7}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)+c$ $\blacksquare$ (10)

• Υπολογισμος του $\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \int (x-a)^{-k}\,dx =$ (11)

$$= \begin{cases} \ln|x-a| + c & \text{αν } k=1 \quad (12) \\ \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}\cdot(-1)+c & \text{αν } k>1 \quad (13) \end{cases}$$

$\longrightarrow \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+c$ (14)

• Υπολογισμός του $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ με $\beta^2-4\gamma<0$ (1)

Πρώτα προσπαθούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο του $x^2+\beta x+\gamma$ (2)
στον αριθμητή $(x^2+\beta x+\gamma)' = 2x+\beta$. Άρα (3)

$$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{B}\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \quad (4)$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta \;+\; \frac{2\Gamma}{B}-\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \quad (5)$$

$$= \frac{B}{2}\left(\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx + \left(\frac{2\Gamma}{B}-\beta\right)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx \right) \quad (6)$$

Στο πρώτο θέτουμε $y=$ (7)

Για το δεύτερο συμπληρώνουμε το τετράγωνο: (8)

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-\beta^2}{4} = \frac{4\gamma-\beta^2}{4}\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}}\right)^2+1\right) \quad (9)$$

και θέτοντας $y = \frac{x+\beta/2}{\sqrt{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}}$ ανάγεται στο (10)

$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$. Αυτό υπολογίζεται με παραγοντική (11)
ολοκλήρωση (12)

$$I_k = \int y' \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} - \int y\,(-k)\,(y^2+1)^{-k-1}\,2y\,dy \quad (13)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}} = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \quad (14)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\,I_k - 2k\,I_{k+1} \Rightarrow \quad (15)$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2k} \frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k \qquad (16)$$

Άρα $$I_k = \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)} I_{k-1} . \qquad (17)$$