Μάθημα 29

$$\boxed{f(x) = \arctan x, \quad |x| \leq 1}$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Ειδικά για την $\arctan x$ αντί να ακολουθήσουμε την τυπική διαδικασία που ακολουθήσαμε στις προηγούμενες συναρτήσεις μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-t^2)^n + \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \right)$$

οπότε $$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

Αν θέσουμε $P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ τότε

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Άρα αν $|x| \leq 1$ $\lim_{n\to\infty} \cancel{p_n(x)} \, |f(x) - p_n(x)| = 0$

Συνεπώς

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

για $x \in [-1, 1]$

Το ολοκληρωτικό κριτήριο για σειρές

<u>Πρόταση</u> Αν $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f\downarrow$ και $f(x)\geq 0\ \forall x\in[1,\infty)$ θέτουμε $a_n=f(n)$. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν το } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει}$$

(δηλ. $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx\in\mathbb{R}$)

<u>Απόδειξη</u> Αφού $f\downarrow$ ισχύει $f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)\quad \forall x\in[n,n+1]$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^N f(x)dx}$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$$

$$\Rightarrow f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_1^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_1^N f(n+1) = \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} a_n.$$

Έτσι αν το $\int_1^N f(x)\,dx$ συγκλίνει (σε αριθμό στο $\mathbb{R}$ για $N\to\infty$) η $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$ είναι άνω φραγμένη, και ως αύξουσα (αφού $a_n\geq 0$) συγκλίνει. Ομοίως αν η $\sum_1^N a_n$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη άρα συγκλίνει έστω στο $\ell\in\mathbb{R}$.

Οπότε υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx$ (1)

διότι $\int_1^{[t]} f(x)\,dx \le \int_1^t f(x)\,dx \le \int_1^{[t]+1} f(x)\,dx$ (2)

$\downarrow t\to\infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow t\to\infty$

ℓ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ℓ

άρα $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx = \ell.$ ▨ (3)

<u>Άσκηση</u> Ελέγξτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο τη σύγκλιση (4)

της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p>0$. (5)

<u>Λύση</u> Αφού $p>0$, $\frac{1}{x^p}\ge 0$ & $\downarrow$ άρα η σειρά $\sum \frac{1}{n^p}$ (6)

συγκλίνει $\Leftrightarrow$ το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει (7)

Όμως $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \log x \Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\log x & \text{αν } p=1 \quad (8) \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) & \text{αν } 0<p\neq 1 \quad (9) \end{cases}$$

Φανερά τα όρια αυτά υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ ανν $p>1$ (10)

Άρα η $\sum\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $p>1$. (11)

<u>Άσκηση</u> Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ (12)

Η λύση με το κριτήριο σύγκρισης: $\left(\frac{n}{1+n^2}\ge 0\right)$ (13)

& $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2} \ge \sum \frac{n}{n^2+n^2} = \sum \frac{1}{2n} = \infty$ (14)

Λύση 4

Με το ολοκληρωτικό: $\frac{x}{1+x^2} \geq 0$ για $x \geq 1$ και (1)

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0 \text{ για } x \geq 1$$ (2)

(3)

άρα $\frac{x}{1+x^2} \downarrow$.

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^\infty = \infty$$ (4)

(5)

άρα η σειρά αποκλίνει

<u>Άσκηση</u> $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$ (6)

1ος τρόπος: κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy $\sum_{n=2}^\infty 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} =$ (7)

$$= \frac{1}{\log 2}\sum_2^\infty \frac{1}{n} = \infty$$ (8)

2ος τρόπος: Ολοκληρωτικό κριτήριο $\frac{1}{x\log x} \geq 0$ για $x \geq 2$

και $\frac{1}{x\log x} \downarrow$ (αφού $x\log x \uparrow$ (γιατί;)) (9)

(10)

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x)\Big|_2^\infty = +\infty \quad \text{άρα } \sum \frac{1}{n\log n} = \infty$$

Άσκηση $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$ (1)

(2)

1ος τρόπος ολοκληρωτικό κριτήριο $\frac{x}{e^{x^2}} \downarrow$ (άσκηση) ≥ 0

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \xlongequal[2x\,dx = -du]{u=-x^2} \int_0^{-\infty} e^{u} (-du) =$$ (3)

$x=0 \quad u=0$

$x=\infty \quad u=-\infty$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{u} du = e^{u}\Big|_{-\infty}^{0} = 1-0 = 1$$ (4)

(5)

άρα η σειρά συγκλίνει

(6)

2ος τρόπος : κριτήριο n-οστής ρίζας

$$\sqrt[n]{n e^{-n^2}} = \sqrt[n]{n}\; e^{-n} \longrightarrow 1 \cdot 0 < 1$$ (7)

(8)

άρα η σειρά συγκλίνει.