Ανάλυση Ι

Πρώτο φυλλάδιο Ασκήσεων.

Άσκηση 1. Δείξτε πως στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) για τρεις οποιουσδήποτε αριθμούς x, y, z ισχύει

$$||x-z|-|y-z|| \leq |x-y| \leq |x-z|+|y-z|$$

Άσκηση 2. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε πως για τρία οποιαδήποτε σημεία x, y, z του X ισχύει

$$d(x,y) \geq |d(x,z)-d(z,y)| \tag{1}$$

Υπόδειξη: Προκύπτει την τριγωνική ιδιότητα και το γεγονός ότι $|x| = \max\{-x, x\}$.

Άσκηση 3. Έστω $(X, \| \|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ορίζουμε για δύο οποιαδήποτε σημεία x, y του X,

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Δείξτε πως ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.

Άσκηση 4. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από στοιχεία του X και $x \in X$. Δείξτε πως οι παρακάτω προτάσεις λένε το ίδιο πράγμα με διαφορετική διατύπωση (δηλαδή είναι λογικά ισοδύναμες):

1. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x \in X$.

2. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \epsilon$.

3. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \dfrac{\epsilon}{5}$.

4. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) \leq \epsilon$.

5. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι δείκτες n ώστε $d(x_n, x) > \epsilon$.

6. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι δείκτες n ώστε $d(x_n, x) \geq \epsilon$.

7. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι δείκτες n ώστε $d(x_n, x) \geq 40\epsilon$.

8. Κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει όλους τους όρους της ακολουθίας εκτός ίσως από πεπερασμένους.

9. Αν πάρουμε μια οποιαδήποτε μπάλα B με κέντρο το x τότε υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι δείκτες n ώστε $x_n \notin B$.

Άσκηση 5. Έστω $(X, \| \|)$ ένας χώρος με νόρμα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στοιχείων του X οι οποίες συγκλίνουν στα x, y αντίστοιχα και $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στα λ, μ αντίστοιχα. Δείξτε

1. Η ακολουθία $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x + y$.
2. Η ακολουθία $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο λx.
3. Η ακολουθία $(\lambda_n x_n + \mu_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\lambda x + \mu y$.

Άσκηση 6. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε πως αν πάρουμε μια οποιαδήποτε μπάλα B και ένα σημείο x μέσα στη μπάλα θα υπάρχει μια μπάλα B' με κέντρο το x η οποία θα περιέχεται εξ ολοκλήρου μέσα στην B.
Υπόδειξη: Έστω $B = B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$, όπου $r > 0$. Έστω $x \in B$. Αν $\epsilon = r - d(a, x)$ δείξτε ότι $B(x, \epsilon) \subseteq B$.

Άσκηση 7. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και B_1, B_2 δύο μπάλες με μη κενή τομή. Δείξτε πως αν πάρουμε ένα σημείο $x \in B_1 \cap B_2$ θα υπάρχει μια μπάλα B' με κέντρο το x η οποία θα περιέχεται εξ ολοκλήρου μέσα στο σύνολο $B_1 \cap B_2$.
Υπόδειξη: Δουλέψτε όπως στην Άσκηση 6

Άσκηση 8. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και B_1, $B_2 \ldots, B_n$, n μπάλες με μη κενή τομή. Δείξτε πως αν πάρουμε ένα σημείο $x \in B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ θα υπάρχει μια μπάλα B' με κέντρο το x η οποία θα περιέχεται εξ ολοκλήρου μέσα στο σύνολο $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$.
Υπόδειξη: Δουλέψτε όπως στην Άσκηση 6

Άσκηση 9. Θα ονομάζουμε ένα μετρικό χώρο (X, d) διακριτό αν για κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$, είναι μπάλα.

1. Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}$ θεωρούμενο σαν μετρικός χώρος με απόσταση $d(x, y) = |x-y|$ είναι διακριτός χώρος.

2. Δείξτε ότι σε ένα διακριτό χώρο μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι σχεδόν σταθερή δηλαδή αν υπάρχει κάποιο n_0 ώστε $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άσκηση 10. Θεωρώ τον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$ με

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Δείξτε ότι $(x_n, y_n) \to (a,b)$ αν και μόνο αν $x_n \to a$ και $y_n \to b$.
Υπόδειξη: Το γεγονός ότι $x_n \to a$ και $y_n \to b$ είναι ισοδύναμο με ότι $x_n - a \to 0$ και $y_n - b \to 0$. Αλλά τότε $(x_n - a)^2 \to 0$ και $(y_n - b)^2 \to 0$ και αφού το άθροισμα δύο μηδενικών ακολουθιών είναι μηδενική ακολουθία καταλήγουμε ότι $(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 \to 0$. Για αντίστροφο παρατηρείστε ότι $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Άσκηση 11. Σε ένα σύνολο X μπορούν να οριστούν πολλές μετρικές. Ωστόσο μπορεί δύο μετρικές ενώ είναι διαφορετικές να μην επηρεάζουν την σύγκλιση των ακολουθιών, με την έννοια ότι μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την μια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη. Θα ονομάζουμε δύο τέτοιες μετρικές *ισοδύναμες*. Δείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ η

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

ορίζει μια μετρική ισοδύναμη με την συνηθισμένη (που η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών x, y είναι το $|x-y|$.

Άσκηση 12. *Θεωρώ δύο μετρικούς χώρους (X, d_X) και (Y, d_Y). Στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ επιθυμώ να ορίσω μια μετρική d που να είναι συμβατή με τις μετρικές των (X, d_X) και (Y, d_Y), με την έννοια πως μια ακολουθία ζευγαριών $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στο (a,b) αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στο a στο χώρο X και η η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στο b στο χώρο Y. Αυτό μπορεί να γίνει με πάρα πολλούς τρόπους.*

Ορίζω

$$d\,(\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\,) = \sqrt{\left(d_X(x_1,x_2)\right)^2 + \left(d_Y(y_1,y_2)\right)^2}$$

$$d_1\,(\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\,) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$$

$$d_0\,(\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\,) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}$$

Δείξτε ότι

1. *Οι $(X \times Y, d)$, $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_0)$ είναι μετρικοί χώροι.*

2. *Και στους τρεις χώρους έχουμε τις ίδιες ακριβώς συγκλίνουσες ακολουθίες, συγκεκριμένα $(x_n, y_n) \to (a,b)$ (ως οποιαδήποτε μετρική d_2, d_1, d_0) αν και μόνο αν $x_n \to a$ και $y_n \to b$.*

Άσκηση 13. *Θεωρώ δύο χώρους με νόρμα $(X, \| \|_X)$ και $(Y, \| \|_Y)$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ επιθυμώ να ορίσω μια νόρμα $\| \|$ που να είναι συμβατή με τις νόρμες των $(X, \| \|_X)$ και $(Y, \| \|_Y)$, με την έννοια πως μια ακολουθία ζευγαριών*

$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *να συγκλίνει στο* (a, b) *αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη δηλαδή η ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *να συγκλίνει στο* a *στο χώρο* X *και η η ακολουθία* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *να συγκλίνει στο* b *στο χώρο* Y. *Αυτό μπορεί να γίνει με πάρα πολλούς τρόπους.*

Στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ *ορίζω*

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$$

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$$\|(x, y)\|_0 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

Δείξτε ότι

1. *Οι* $(X \times Y, \| \|_2)$, $(X \times Y, \| \|_1)$, $(X \times Y, \| \|_0)$ *είναι χώροι με νόρμα.*

2. $(x_n, y_n) \to (a, b)$ *αν και μόνο αν* $x_n \to a$ *και* $y_n \to b$.